PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaines 27 et 28

du lundi 20 mai 2024 au samedi 1$^{\text{er}}$juin 2024

← Sem. 27 début

1. **Tout exercice sur l'intégration, notamment ceux utilisant l'inégalité de Taylor-lagrange et/ou les sommes de Riemann**.
2. Rappels : matrices à n lignes et p colonnes à coeff. dans $\mathbb{K}$. Base canonique, dimension de $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$.
3. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ où $\dim E = p$ et $\dim F = n$. Application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. Image et noyau d'une matrice : les vecteurs-colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
4. Relation avec la composition d'applications linéaires. App. linéaire bijective et matrice inversible.
5. Rang d'une matrice : c'est aussi le rang du système des vecteurs-colonnes de cette matrice.
6. Mat. triangulaire : retour sur une CNS d'inversibilité et inverse d'une matrice triangulaire inversible.
7. Noyau, image et rang d'une matrice. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$.
8. Le rang d'une matrice est $\dim \operatorname{Im} A$ c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les (vecteurs-)colonnes de A. Calcul pratique : c'est aussi le nombre de pivots d'une matrice échelonnée équivalente selon les lignes à A.
9. Le rang d'une application linéaire est le rang de sa matrice dans n'importe quelle base.
10. Produit de matrices et composition d'applications linéaires. Application linéaire et matrice inversible.
11. Caractérisation des matrices inversibles à l'aide du rang. La multiplication par une matrice inversible conserve le rang. Le rang de $A \in \mathrm{M}_{np}(K)$ est le rang de A^{T}.

← Sem. 28 début

12. Matrice de passage. Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur.
13. Effet d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire. Formule $A' = Q^{-1}AP$. Cas des endomorphismes : $A = PA'P^{-1}$, définition de matrices semblables. Application au calcul de A^n.
14. Retour sur les systèmes linéaires. Rang d'un système et dimension de l'ensemble des solutions.
15. Déterminant d'un système de vecteurs dans une base $\mathcal{B}$: unique application de E^n dans $\mathbb{K}$, n-linéaire alternée valant 1 sur la base $\mathcal{B}$ (admis). Propriété : $\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique.
16. Justification de la définition lorsque $n = 2$ et $n = 3$. Règle de Sarrus.
17. Si $f : E^n \to \mathbb{K}$ est n-linéaire alternée, alors $f = f(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$. Comparaison de $\det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}'}$ si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E. Conséquence : $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ est une base de E ssi $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.
18. Déterminant d'un endomorphisme : $\det u = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$: justification de la définition.
19. $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n,\ \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det u \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$. Déterminant d'une composée.
20. $\det(\mathrm{id}_E) = 1$. $u \in \mathrm{GL}(E)$ ssi $\det u \neq 0$, et le cas échéant, $\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$. Si $\lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda\, u)$.
21. Déterminant d'une matrice carrée de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$: unique application de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, linéaire par rapport à chaque colonne de sa variable, antisymétrique et vérifiant $\det I_n = 1$.
22. Déterminant et transposition, opérations sur les colonnes d'un déterminant.
23. Développement par rapport à une ligne, une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire.

← Sem. 27 fin

24. Déterminant de Van Der Monde. Factoriser un déterminant par des opérations sur les lignes/colonnes.
25. Définition de série, de série convergente. Exemples. Condition nécessaire de convergence : le terme général tend vers 0. Ce n'est pas une condition suffisante : exemples !
26. Lien entre suite et série : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de même nature que $\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n-1})$.
27. Séries à termes positifs : théorème de majoration/minoration. Exemples.
28. Règle de d'Alembert (2 versions) : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_{n+1}/u_n \leq a < 1$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = l < 1$.
29. Théorème de comparaison des séries positives : équivalents, domination. Utilisation de dév. limités.
30. Séries de Riemann. Exemple des séries de Bertrand.
31. Série réelle ou complexe absolument convergente. Toute série absolument convergente est convergente.
32. Séries alternées. « Critère spécial » de convergence des séries alternées. Exemples.

← Sem. 28 fin

Questions de cours relatives au programme de colles

Semaine 27
n°1 à 7

Semaine 28
n°5 à 11

1. Inégalité de Taylor-Lagrange : énoncé complet .
2. Composition d'applications linéaires et produit matriciel : preuve
3. Définition de matrice de passage, interprétation comme matrice de id_E et inversibilité.
4. Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur : preuve de la formule X=PX'
5. Effet de changements de bases sur la matrice d'une application linéaire : preuve + cas des endomorphismes. Définition de matrices semblables.
6. Définition du déterminant d'un système de vecteurs dans une base.
7. Propriétés du déterminant d'un endomorphisme : énoncé + preuve
8. Calcul du déterminant de Vandermonde d'ordre $n \in [\![.2; +\infty[\![$ (démonstration).
9. Définition de série, de série convergente. Terme général d'une série convergente ... preuve !
10. Lien entre suite et série télescopique : énoncé+preuve. Exemple d'utilisation du théorème.
11. Théorème de majoration/minoration pour les séries positives : énoncé+preuve. Exemple d'utilisation.