PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaine 29

du lundi 10 juin 2024 au samedi 15 juin 2024

1. **Tout exercice sur les déterminants**.
2. Définition de série, de série convergente. Somme partielle d'indice $n \in \mathbb{N}$, reste d'une d'indice $n \in \mathbb{N}$ série convergente. Exemples. Condition nécessaire de convergence : le terme général tend vers 0. Ce n'est pas une condition suffisante : exemples !
3. Lien entre suite et série : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de même nature que $\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n-1})$.
4. Séries à termes positifs : théorème de majoration/minoration. Exemples.
5. Règle de d'Alembert (2 versions) : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_{n+1}/u_n \leq a < 1$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = l < 1$.
6. Comparaison série-intégrale : pour une fct. f réelle positive, continue et décroissante. **Pas de théorème** mais la méthode (encadrement de $\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$ puis somme) **doit être connue**.
7. Théorème de comparaison des séries positives : équivalents, domination. Utilisation de dév. limités.
8. Séries de Riemann (preuve du rés. par utilisation d'un équivalent). Exemple des séries de Bertrand.
9. Série réelle ou complexe absolument convergente. Toute série absolument convergente est convergente.
10. Séries alternées. Méthode (uniquement sur des exemples apparus dans des exercice) pour montrer qu'une série alternée converge : utilisation de deux suites extraites (adjacentes, ou pas) de la suite des sommes partielles.
11. Ensembles finis.
    a. Déf. : ensemble fini E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$: il existe une bijection de $[\![1;n]\!]$ sur E. Unicité du card.
    b. Opérations sur les ensembles finis : card. d'une réunion, du complémentaire, d'un prod. cartésien.
    c. Applications dans des ensembles finis : conséquence de l'injectivité, la surjectivité ...
12. Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ et $f : E \to F$ alors (f injective) ssi (f surjective) ssi (f bijective) .
13. Ensembles d'applications : nombre d'applications de E dans F.
14. Nombre d'injections de E dans F quand $|E| \leqslant |F|$ c.-à-d. nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments où $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p \leqslant n$. Arrangements A_n^p.
15. Nombre de bijections de E dans F quand $|E| = |F|$.
16. Ensemble des parties de E. Ensemble des parties à p éléments de E : combinaisons notées $\binom{n}{p}$.

Questions de cours relatives au programme de colles

1. CNS de convergence des séries de Riemann. Enoncé.
2. Théorème de comparaison des séries positives par domination, un équivalent : énoncé + preuve.
3. Toute série absolument convergente est convergente : preuve.
4. Calcul du déterminant de Vandermonde d'ordre $n \in [\![.2; +\infty[\![$ (démonstration).
5. Cardinal d'un produit cartésien $E \times F$ d'ensembles finis : énoncé.
6. Si E et F sont des ens. finis, nombre d'application de E dans F : énoncé
7. Si E et F sont des ens. finis : – nombre d'applications injectives de E dans F si $|E| \leqslant |F|$: énoncé. – nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments où $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p \leqslant n$: énoncé – nombre de bijections de E dans F si $|E| = |F|$. Nombre de parties d'un ensemble E : énoncés
8. Si E est un ens. fini de card. $n \in \mathbb{N}^*$, nombre de parties à p éléments de E avec $0 \leqslant p \leqslant n$: énoncé.