PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaines 29 et 30
du lundi 17 juin 2024 au samedi 22 juin 2024

1. Ensembles finis.
   a. Déf. : ensemble fini E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$: il existe une bijection de $[\![1;n]\!]$ sur E. Unicité du card.
   b. Opérations sur les ensembles finis : card. d'une réunion, du complémentaire, d'un prod. cartésien.
   c. Applications dans des ensembles finis : conséquence de l'injectivité, la surjectivité ...
2. Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ et $f : E \to F$ alors (f injective) ssi (f surjective) ssi (f bijective).
3. Ensembles d'applications : nombre d'applications de E dans F.
4. Nombre d'injections de E dans F quand $|E| \leqslant |F|$ c.-à-d. nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments où $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p \leqslant n$. Arrangements A_n^p.
5. Nombre de bijections de E dans F quand $|E| = |F|$.
6. Ensemble des parties de E. Ensemble des parties à p éléments de E : combinaisons notées $\binom{n}{p}$.
7. Expérience aléatoire et univers. Espace probabilisable fini, événements. Opérations sur les événements.
8. Système complet d'événements. Définition de probabilité, espace probabilisé fini. Propriétés.
9. Variables aléatoires, exemples. Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle et $A \subset \mathbb{R}$, définition de l'événement $(X \in A) = X^{-1}(A) \subset \Omega$ puis de $(X = u)$, $(X \leqslant u)$, $(X < u)$,...etc. si $u \in \mathbb{R}$.
10. Une probabilité est entièrement déterminée par les images des singletons. Équiprobabilité.
11. Probabilité conditionnelle relativement à $A \in \mathcal{P}(\Omega)$: c'est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. **Formule des probabilités composées**. **Formule des probabilités totales**. Arbres de probabilités.
12. **Formule de Bayes**, exemples. Couple d'événements indépendants, interprétation.
13. A et B sont des événements indépendants ssi A et $\overline{B}$ sont indépendants.
14. Famille d'événements indépendants : événements deux à deux indépendants, mutuellement indép.ts.
15. Des événements mutuellement indépendants forment une famille d'événements deux à deux indép.ts.
16. Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont deux à deux indépendants (resp.t mutuellement indép.ts) et si pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$ alors $B_1, B_2, \cdots, B_n$ sont deux à deux indépendants (resp.t mutuellement indép.ts).
17. Si $X : \Omega \to E$ vérifie $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ alors $((X = x_i))_{i \in [\![1;m]\!]}$ est un système complet d'événements de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
18. Définition de la loi de X notée P_X : c'est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$. P_X est entièrement déterminée par $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ et les $\big(P(X = x_i)\big)_{i \in [\![1;m]\!]}$: repres.tion en tableau ou en bâtons.
19. Image d'une variable aléatoire par une fonction. Loi de $u(X)$ en fonction de la loi de X : formule

$$P(u(X) = \gamma) = \sum_{\substack{i=1 \\ u(x_i)=\gamma}}^{n} P(X = x_i)$$

Questions de cours relatives au programme de colles

1. Cardinal d'un produit cartésien $E \times F$ d'ensembles finis : énoncé+preuve.
2. Si E et F sont des ens. finis, nombre d'application de E dans F : énoncé seulement.
3. Si E et F sont des ens. finis, nombre d'applications injectives de E dans F si $|E| \leqslant |F|$, nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments où $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p \leqslant n$ et nombre de bijections de E dans F si $|E| = |F|$. Nombre de parties d'un ensemble E : énoncés seulement !
4. Si E est un ens. fini de card. $n \in \mathbb{N}^*$, nombre de parties à p éléments de E avec $0 \leqslant p \leqslant n$: énoncé.
5. Définition de système complet d'événements, définition de probabilité. Propriétés (énoncé seulement).
6. Formule des probabilités composées (intersection de n événements) : énoncé + exemple d'utilisation
7. Formule des probabilités totales : énoncé + preuve + exemple d'utilisation
8. Formule de Bayes : énoncé + preuve + exemple d'utilisation
9. Définition d'événements indépendants, de famille d'événements deux à deux indépendants, mutuellement indépendants.