PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaine 28

du mardi 30 mai 2023 au samedi 3 juin 2023

1. Matrice de passage. Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur.
2. Effet d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire. Formule $A' = Q^{-1}AP$. Cas des endomorphismes : $A = PA'P^{-1}$, définition de matrices semblables. Application au calcul de A^n.
3. Retour sur les systèmes linéaires. Rang d'un système et dimension de l'ensemble des solutions.
4. Déterminant d'un système de vecteurs dans une base $\mathcal{B}$: unique application de E^n dans $\mathbb{K}$, n-linéaire alternée valant 1 sur la base $\mathcal{B}$ (admis). Propriété : $\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique.
5. Justification de la définition lorsque $n = 2$ et $n = 3$. Règle de Sarrus.
6. Si $f : E^n \to \mathbb{K}$ est n-linéaire alternée, alors $f = f(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$. Comparaison de $\det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}'}$ si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E. Conséquence : $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ est une base de E ssi $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.
7. Déterminant d'un endomorphisme : $\det u = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$: justification de la définition.
8. $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n,\ \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det u \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$. Déterminant d'une composée.
9. $\det(\mathrm{id}_E) = 1$. $u \in \mathrm{GL}(E)$ ssi $\det u \neq 0$, et le cas échéant, $\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$. Si $\lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda\, u)$.
10. Déterminant d'une matrice carrée : c'est le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique. Conséquences : det est linéaire par rapport à chaque colonne de sa variable, alternée vis à vis des colonne de sa variable et $\det I_n = 1$.
11. Si $\mathcal{B}$ une base de E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n,\ \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

   et si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\det M_{\mathcal{B}}(u) = \det u$. Opérations élémentaires sur les colonnes d'un déterminant.
12. Propriétés : déterminant d'un produit de matrices, caractérisation des matrices inversibles et $\det A^{-1}$.
13. Déterminant de la transposée d'une matrice (preuve non exigible). Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure. Exemple : déterminant de Vandermonde.
14. Calcul de déterminants : intérêt des opérations élémentaires pour se ramener à un déterminant d'une matrice triangulaire. Factorisation : pour faire quoi ? Explications sur l'intérêt de $\det(f - \lambda \mathrm{id}_E)$.
15. Définition de série, de série convergente. Somme partielle d'indice $n \in \mathbb{N}$, reste d'une d'indice $n \in \mathbb{N}$ série convergente. Exemples. Condition nécessaire de convergence : le terme général tend vers 0. Ce n'est pas une condition suffisante : exemples !
16. Lien entre suite et série : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de même nature que $\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n-1})$.
17. Séries à termes positifs : théorème de majoration/minoration. Exemples.
18. Règle de d'Alembert (2 versions) : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_{n+1}/u_n \leq a < 1$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = l < 1$.
19. Comparaison série-intégrale : pour une fct. f réelle positive, continue et décroissante. **Pas de théorème** mais la méthode (encadrement de $\int_{k-1}^{k} f(t)\, dt$ puis somme) **doit être connue**.
20. Théorème de comparaison des séries positives : équivalents, domination. Utilisation de dév. limités.
21. Séries de Riemann (preuve du rés. par utilisation d'un équivalent). Exemple des séries de Bertrand.

Questions de cours relatives au programme de colles

1. Définitions : déterminant d'un syst. de vecteurs dans une base. Déterminant d'un endomorphisme ...
2. Définition de série, de série convergente. Terme général d'une série convergente ... preuve !
3. Lien entre suite et série télescopique : énoncé+preuve. Exemple d'utilisation du théorème.
4. Théorème de majoration/minoration pour les séries positives : énoncé+preuve. Exemple d'utilisation.
5. Théorème de comparaison des séries positives par domination, un équivalent : énoncé + preuve.
6. CNS de convergence des séries de Riemann. Enoncé + preuve.
7. Calcul du déterminant de Vandermonde d'ordre $n \in [\![.2; +\infty[\![$ (démonstration).