PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaine 27

du lundi 22 mai 2022 au samedi 27 mai 2023

1. **Tout exercice sur l'intégration, notamment ceux utilisant la l'inégalité de Taylor-Lagrange et/ou les sommes de Riemann**.
2. Rappels : matrices à n lignes et p colonnes à coeff. dans $\mathbb{K}$. Base canonique, dimension de $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$.
3. Matrice d'un système de p vecteurs de E. Matrice d'une application linéaire. Exemples.
4. Lien entre les coordonnées d'un vecteur et celles de son image par une application linéaire : traduction matricielle de $y = u(x)$ où $x \in E$, $y \in F$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
5. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ où $\dim E = p$ et $\dim F = n$. Application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. Image et noyau d'une matrice : les vecteurs-colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
6. Relation avec la composition d'applications linéaires. App. linéaire bijective et matrice inversible.
7. Rang d'une matrice : c'est aussi le rang du système des vecteurs-colonnes de cette matrice.
8. Mat. triangulaire : retour sur une CNS d'inversibilité et inverse d'une matrice triangulaire inversible.
9. Noyau, image et rang d'une matrice. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$.
10. Le rang d'une matrice est $\dim \mathrm{Im}\, A$ c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les (vecteurs-)colonnes de A. Calcul pratique : c'est aussi le nombre de pivots d'une matrice échelonnée équivalente selon les lignes à A.
11. Le rang d'une application linéaire est le rang de sa matrice dans n'importe quelle base.
12. Produit de matrices et composition d'applications linéaires. Application linéaire et matrice inversible.
13. Caractérisation des matrices inversibles à l'aide du rang. La multiplication par une matrice inversible conserve le rang. Le rang de $A \in \mathrm{M}_{np}(K)$ est le rang de A^{T}.
14. Matrice de passage. Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur.
15. Effet d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire. Formule $A' = Q^{-1}AP$. Cas des endomorphismes : $A = PA'P^{-1}$, définition de matrices semblables. Application au calcul de A^n.
16. Retour sur les systèmes linéaires. Rang d'un système et dimension de l'ensemble des solutions.
17. Déterminant d'un système de vecteurs dans une base $\mathcal{B}$: unique application de E^n dans $\mathbb{K}$, n-linéaire alternée valant 1 sur la base $\mathcal{B}$ (admis). Propriété : $\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique.
18. Justification de la définition lorsque $n = 2$ et $n = 3$. Règle de Sarrus.
19. Si $f : E^n \to \mathbb{K}$ est n-linéaire alternée, alors $f = f(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$. Comparaison de $\det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}'}$ si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E. Conséquence : $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ est une base de E ssi $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.
20. Déterminant d'un endomorphisme : $\det u = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$: justification de la définition.
21. $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n,\ \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det u \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$. Déterminant d'une composée.
22. $\det(\mathrm{id}_E) = 1$. $u \in \mathrm{GL}(E)$ ssi $\det u \neq 0$, et le cas échéant, $\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$. Si $\lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda\, u)$.

Questions de cours relatives au programme de colles

1. Inégalité de Taylor-Lagrange : énoncé complet .
2. Composition d'applications linéaires et produit matriciel : preuve
3. Définition de matrice de passage, interprétation comme matrice de id_E et inversibilité.
4. Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur : preuve de la formule X=PX'
5. Effet de changements de bases sur la matrice d'une application linéaire : preuve + cas des endomorphismes. Définition de matrices semblables.
6. Définition du déterminant d'un système de vecteurs dans une base.
7. Propriétés du déterminant d'un endomorphisme : énoncé + preuve