PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaines 25 et 26

du lundi mai 2024 au samedi 18 mai 2024

← Sem. 25 début

1. Définition (et uniquement cela pour l'instant) du rang d'une famille de vecteurs.
2. Isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie : $E \simeq F \Leftrightarrow \dim E = \dim F$.
3. Si E et F sont de dimension finie, $\dim \mathcal{L}(E, F) = (\dim E)(\dim F)$: admis à ce stade.
4. Rang d'une application linéaire définie entre deux espaces vectoriels dont l'un au moins est de dimension finie. Si $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$, $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg} v, \operatorname{rg} u)$.
5. Formule du rang : si E est de dim finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim E = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$.
6. À cette occasion : existence d'un isomorphisme entre $\operatorname{Im} u$ et un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E.

← Sem. 26 début

7. Équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim E = \dim F$.
8. Si E est un ev de dim. finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u inversible à gauche ou à droite ssi u inversible.
9. Hyperplan H d'un ev E de dim finie non nulle. $E = H \oplus D$ si D droite non incluse dans H.
10. Un sev H de E est un hyperplan ssi $H = \operatorname{Ker} \varphi$ où φ forme linéaire non nulle. Éq. d'un hyperplan.
11. Fonctions en escalier et subdivisions subordonnées. Intégrale d'une fonction en escalier.
12. Fonction continue par morceaux. Intégrale d'une fonction continue par morceaux : Notation $\int_{[a;b]} f$.
13. Propiétés algébriques de l'intégrale. Positivité et croissance. Inégalité triangulaire et de continuité.
14. Pour une fonction $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue positive, $\int_{[a;b]} f = 0$ ssi $f = \underline{0}$.
15. Extensions de la définition : notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Relation de Chasles. **Sommes de Riemann**.
16. Primitive s'annulant en a de f continue : $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. **Exercices : rappels et compléments.**
17. **Intégrations par parties successives**. Chang.ts de variable : $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x$
18. **Inégalité de Taylor-Lagrange**. La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas exigible.
19. Pour tout $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ vérifiant $B \neq 0$, il existe un unique couple $(E, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $\deg R < \deg B$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $B(x) \neq 0$, $A(x)/B(x) = E(x) + R(x)/B(x)$. E est appelé partie entière de A/B. Définition de fonction rationnelle.
20. Décomposition en éléments simples de A/B avec $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ — lorsque B est scindé à racines simples (admis) — lorsque B est scindé (admis) — lorsque $B \in \mathbb{R}[X]$ possède un facteur irréductible de degré 2 (sur des exemples). Application au calcul de primitives.

← Sem. 25 fin

21. Primitives usuelles (rappel). Primitives et intégrales de fonctions polynomiales et rationnelles trigonométriques [règles de Bioche seulement évoquées en exercices !] .
22. Rappels : matrices à n lignes et p colonnes à coeff. dans $\mathbb{K}$. Base canonique, dimension de $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$.
23. Matrice d'un système de p vecteurs de E. Matrice d'une application linéaire. Exemples.
24. Lien entre les coordonnées d'un vecteur et celles de son image par une application linéaire : traduction matricielle de $y = u(x)$ où $x \in E$, $y \in F$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
25. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ où $\dim E = p$ et $\dim F = n$. Application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. Image et noyau d'une matrice : les vecteurs-colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
26. Relation avec la composition d'applications linéaires. App. linéaire bijective et matrice inversible.
27. Rang d'une matrice : c'est aussi le rang du système des vecteurs-colonnes de cette matrice.
28. Mat. triangulaire : retour sur une CNS d'inversibilité et inverse d'une matrice triangulaire inversible.

← Sem. 26 fin

Questions de cours relatives au programme de colles

1. Tout s.e.v. d'un espace vectoriel de dimension finie possède un supplémentaire : preuve. Semaine 25 n°1 à 6
2. Définition du rang d'une application linéaire. Formule du rang : énoncé + preuve.
3. Nombre de vecteurs d'une famille génératrice/libre d'un ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$: énoncé. Semaine 26 n°4 à 10
4. Équiv. entre injectivité, surjectivité et bijectivité pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim E = \dim F$ + preuve.
5. Si $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ est continue positive, alors $\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ ssi } f = \underline{0} \right)$ + preuve
6. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I et $a \in I$, alors $F : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et $F' = f$: énoncé + preuve.
7. Inégalité de Taylor-Lagrange : énoncé seulement. Formule de chgt de variable dans une intégrale
8. Énoncé du résultat sur les sommes de Riemann : savoir donne un exemple de calcul de la limite.
9. Lien entre les coordonnées d'un vecteurs et celles de son image par une application linéaire.
10. Composition d'applications linéaires et produit matriciel : énoncé seulement.