PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaines 23 et 24

du lundi 31 mars 2025 au samedi 26 avril 2025

← Sem. 23 début

1. Applications linéaires. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$. Exemples d'appl. linéaires. Forme linéaire.
2. Composition de deux applications linéaires. Inverse d'une application linéaire.
3. Image directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.
4. Caractérisation des applications linéaires injectives et surjectives à l'aide de $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$.
5. Ensemble des solutions d'une équation linéaire.
6. Système libre et système lié. Base d'un ev : système libre et générateur ; extension aux familles.
7. Coordonnées d'un vecteur dans une base.
8. Détermination d'une application linéaire sur une base, sur des sev supplémentaires.
9. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une appl. linéaire par l'image d'une base.

← Sem. 24 début

10. $\mathcal{L}(E)$ et le gr. linéaire $\mathrm{GL}(E)$. Projections vectorielles. Projecteurs, projecteurs associés. Symétries.
11. Dimension finie : existence d'une famille génératrice finie.
12. Théorème de la base extraite (d'une famille génératrice). Conséquence : tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{\vec{0}\}$ possède au moins une base finie.
13. Un système de $n+1$ vecteurs tous combinaison linéaire de n vecteurs $n \in \mathbb{N}^*$ est lié.
14. Définition de la dimension : dans un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{\vec{0}\}$, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.
15. Dans un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,
    — toute famille libre possède au plus n vecteurs.
    — toute famille libre de n vecteurs est une base.
16. Énoncé équivalent pour les familles génératrices. Théorème de la base incomplète .

← Sem. 23 fin

17. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.
18. Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie possède un supplémentaire.
19. Formule de Grassmann : Si F et G sev de E de dim finie, $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
20. F et G sont en somme directe dans E ssi $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$.
21. Définition (et uniquement cela pour l'instant) du rang d'une famille de vecteurs.
22. Isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie : $E \simeq F \Leftrightarrow \dim E = \dim F$.
23. Si E et F sont de dimension finie, $\dim \mathcal{L}(E,F) = (\dim E)(\dim F)$: admis à ce stade.
24. Rang d'une application linéaire définie entre deux espaces vectoriels dont l'un au moins est de dimension finie. Si $(u,v) \in (\mathcal{L}(E))^2,\ \operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg} v, \operatorname{rg} u)$.
25. Formule du rang : si E est de dim finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\dim E = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$.
26. À cette occasion : existence d'un isomorphisme entre $\operatorname{Im} u$ et un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E.
27. Équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim E = \dim F$.
28. Si E est un ev de dim. finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u inversible à gauche ou à droite ssi u inversible.
29. Hyperplan H d'un ev E de dim finie non nulle. $E = H \oplus D$ si D droite non incluse dans H.
30. Un sev H de E est un hyperplan ssi $H = \operatorname{Ker} \varphi$ où φ forme linéaire non nulle. Éq. d'un hyperplan.
31. Fonctions en escalier et subdivisions subordonnées. Intégrale d'une fonction en escalier.
32. Fonction continue par morceaux. Intégrale d'une fonction continue par morceaux : Notation $\int_{[a;b]} f$.
33. Propiétés algébriques de l'intégrale. Positivité et croissance. Inégalité triangulaire et de continuité.

← Sem. 24 fin

Questions de cours relatives au programme de colles

1. Image directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire : énoncé et preuve.
2. Définition de système libre et de système lié. Définition de base. Caractérisation de système lié.
3. Définition de somme directe **et** caractérisation. Définition de sous-espaces supplémentaires.
4. Caract. de l'injectivité, de la surjectivité d'une app. linéaire par l'image d'une base : énoncé + preuve.
5. Caract. de l'injectivité et de la surjectivité d'une app. linéaire f par $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$: énoncé et preuve.
6. Définition d'e.v. de dim finie, de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie et justification.
7. Théorème de la base incomplète : énoncé seulement. Systèmes libres/liés dans un ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{K}$: les deux énoncés.
8. Tout s.e.v. d'un espace vectoriel de dimension finie possède un supplémentaire : preuve.
9. Définition de rang d'un système de vecteurs. Définition du rang d'une application linéaire. Formule du rang : énoncé + preuve.
10. Un s.e.v. H d'un e.v. de dim finie non nulle est un hyperplan ssi H est le noyau d'une forme linéaire non nulle : preuve.

Semaine 23
n°1 à 7

Semaine 24
n°4 à 10