PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaines 19 et 20

du lundi 19 février 2024 au samedi 16 mars 2024

← Sem. 19 début

1. Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis. Interprétation géométrique.
2. Inégalités des accroissements finis. Version 1 : $m \leq f' \leq M$ sur $[a;b]$. Version 2 : $|f'| \leq k$ sur I.
3. Conséquences : sens de variation des fonctions, théorème de la limite de la dérivée.
4. Définition de fonction convexe. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, par rapport à ses tangentes lorsque cette fonction est également dérivable. Inégalités de convexité.
5. Caractérisation des fonctions convexes parmi les fonctions 2 fois dérivables.
6. Étude d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$, utilisation de l'inégalité des accroissements finis. Sur des exemples : intervalle stable, application contractante, point fixe.
7. Espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$. Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ noté $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est « identifié » à une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) nulle à partir d'un certains rang – PAS DE THÉORIE. Produit.

← Sem. 20 début

8. Degré d'un polynôme : degré d'une somme, d'un produit. Sous-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}$.
9. Produit nul de 2 polynômes. Éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$: ce sont les éléments inversibles de $\mathbb{K}$.
10. Fonctions polynomiales. Composition de polynômes. Degré d'une composée de deux polynômes.
11. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. Exemples de divisions pratiques. Multiples et diviseurs.
12. Division par $(X-a)$ et par $\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$ lorsque $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts.
13. Si $P \in \mathbb{K}_n[X] \setminus \{0\}$, P possède au plus n racines distinctes dans $\mathbb{K}$ (et contraposée).
14. Polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ qui coïncident en $n+1$ points distincts. Identification des coefficients.
15. Opérateur de dérivation. Propriétés : linéarité, produit, composition, degré. Dérivée n^{e}de X^p.
16. Dérivations successives, formules de Taylor. Reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^k$.
17. Racines multiples de P. Caractérisation à l'aide de P' puis à l'aide des dérivées successives de P.

← Sem. 19 fin

18. Polynômes irréductibles. Si $\deg P = 1$, P est irréductible. Polynômes irréductibles de degré 2.
19. Théorème de D'Alembert-Gauss (admis). Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.
20. Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et factorisation dans $\mathbb{R}[X]$. Exemples. Deux racines complexes conjuguées de $P \in \mathbb{R}[X]$ ont même ordre de multiplicité. Polynômes scindés
21. Somme et produit des racines d'un pol. scindé. Rel. coeff-racines pour les polynômes de deg. 2 ou 3.
22. Définition d'un développement limité en x_0 et en $+\infty$. Troncature, DL et équivalents, parité.
23. Si $f \in \mathrm{DL}_1(x_0)$ et $x_0 \in I$ alors $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable au point x_0.
24. Développements limités usuels : obtention par la formule de Taylor-Young (démontrée plus tard).
25. DL en 0 de cos, sin, sh, ch, exp, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ et $x \mapsto \ln(1+x)$. En particulier DL de $x \mapsto (1+x)^{-1}$.
26. Propriétés des DL : somme et produit, intégration et dérivation.
27. DL en 0 de $x \mapsto (1-x)^{-1}$. DL_n en x_0 de $x \mapsto (1-u(x))^{-1}$ lorsque $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0$ et $u \in \mathrm{DL}_n(x_0)$.
28. Conséquence : Passage à l'inverse (en utilisant le DL de $x \mapsto (1 \pm x)^{-1}$). DL d'un quotient.
29. Conformément au programme, la composition de DL n'est étudiée que sur des exemples, mais est étudiée sur des exemples !
30. Calcul de limites et études de fonctions : asymptotes, tangente en un point et position relative de la courbe et de sa tangente. CN sur un DL_1 et CS sur un DL_2 pour un extr. local en un point intérieur.

← Sem. 20 fin

Questions de cours relatives au programme de colles

Semaine 19
n°1 à 8

Semaine 20
n°4 à 12

1. Énoncé du lemme du TdR + énoncé et démonstration du théorème de Rolle.
2. Énoncé et démonstration du théorème des accroissements finis.
3. Énoncé des deux versions de l'inégalité des accroissements finis. Énoncé de la formule de Leibniz.
4. Définition du dégré d'un polynôme et équivalence

$$\forall P = (a_n) \in \mathbb{K}[X],\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\},\ (\deg P \leq k) \iff (\forall n \in \mathbb{N},\ n > k \Rightarrow a_n = 0)$$

5. Degré d'une somme, d'un produit : démonstration.
6. Définition du polynôme composé $P \circ Q$. Degré de $P \circ Q$: démonstration.
7. Division euclidienne : énoncé et démonstration.
8. $(X-a)^p \mid P$ et $(X-a)^{p+1} \nmid P$ ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-a)^p Q$ et $Q(a) \neq 0$: preuve.
9. Si $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$ possède $n+1$ racines distinctes, alors $P = 0$: preuve.
10. Preuve de la formule de Taylor : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \forall a \in \mathbb{K},\ P = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a)(X-a)^k$.
11. Définition de la notion de développement limité en $x_0 \in \mathbb{R}$ et en $+\infty$.
12. Développements limités usuels.