PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaines 17 et 18

du lundi 5 février 2024 au samedi 17 février 2024

← Sem. 17 début

1. **Tout exercice sur les suites** puis limites des fonctions : diverses définitions.
2. Limite à gauche, à droite. Limites : propriétés liées à l'ordre. Théorème de la limite monotone.
3. Opérations algébriques sur les limites. Composition de limites.
4. Continuité en un point ; utilisation de suites. Prolongement par continuité.
5. Fonction continue sur un intervalle. Espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. Composition de fonctions continues.
6. Fonction continue sur un segment (résultat admis).
7. Applications lipschitziennes : définition, exemples. Application contractante.
8. Lemme du TVI par suites adjacentes dichotomiques. Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de la bijection monotone (démontré partiellement).

← Sem. 18 début

9. Relations de comparaison pour les fonctions : domination et prépondérance, équivalence.
10. Caractérisations avec $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ Propriétés algébriques des relations de comparaison.
11. Si $f \sim_a g$ et $\lim_{x\to a} g(x) = l \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ ou $0^+/+\infty$, alors $\ln f \sim_a \ln g$. $e^u \sim_a e^v$ ssi $(u-v)(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
12. Comparaison des fonctions de référence en 0 et $+\infty$.
13. Fonctions à valeurs complexes. Limites, continuité : opérations algébriques.
14. Caractérisations des limites ou de la continuité par l'utilisation des parties réelles et imaginaires.
15. Dérivabilité en un point des fonctions réelles. Dérivabilité à droite, à gauche.
16. Equivalence avec la différentiabilité en un point (ç-à-d l'existence d'un DL d'ordre 1).
17. Fonction dérivée sur un intervalle. Dérivées d'ordre supérieur. Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
18. Propriétés algébriques : linéarité, produit, inverse et quotient. Formule de Leibniz.
19. Dérivée et composition, dérivée de la réciproque d'une application bijective.

← Sem. 17 fin

20. Extremum local en un point où f est dérivable (lemme du TdR). Théorème de Rolle.
21. Théorème des accroissements finis. Interprétation géométrique.
22. Inégalités des accroissements finis. Version 1 : $m \le f' \le M$ sur $[a;b]$. Version 2 : $|f'| \le k$ sur I.
23. Conséquences : sens de variation des fonctions, théorème de la limite de la dérivée.
24. Définition de fonction convexe. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, par rapport à ses tangentes lorsque cette fonction est également dérivable. Inégalités de convexité.
25. Caractérisation des fonctions convexes parmi les fonctions 2 fois dérivables.
26. Étude d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$, utilisation de l'inégalité des accroissements finis. Sur des exemples : intervalle stable, application contractante, point fixe.
27. Espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ à partir des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Produit de polynômes.
28. Degré d'un polynôme : degré d'une somme, d'un produit. Sous-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}$.
29. Produit de 2 polynômes non nuls. Éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$.
30. Fonctions polynomiales. Composition de polynômes. Degré d'une composée de deux polynômes.

← Sem. 18 fin

Questions de cours relatives au programme de colles

Semaine 17 n°1 à 7

Semaine 18 n°4 à 10

1. Preuve de la proposition : si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.
2. Preuve du théorème de la limite monotone : fonction croissante majorée/non majorée.
3. Preuve du lemme : si $g \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ vérifie $g(a)g(b) \le 0$, il existe $c \in [a;b]$ tel que $g(c) = 0$.
4. Preuve du théorème des valeurs intermédiaires.
5. Définition du nombre dérivée d'une fonction en un point + différentiabilité (énoncé seulement)
6. Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables au point a, alors $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$: preuve.
7. Énoncé et démonstration de la formule de Leibniz.
8. Énoncé du lemme du TdR + énoncé et démonstration du théorème de Rolle.
9. Énoncé et démonstration du théorème des accroissements finis.
10. Énoncé des deux versions de l'inégalité des accroissements finis.