PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaines 15 et 16

du lundi 18 janvier 2025 au samedi 1$^{\text{er}}$ février 2025

← Sem. 15 début

1. **Tout exercice sur le calcul matriciel**.
2. Ensemble des nombre réels : propriétés. **Revoir les notions du chapitre 02** : **intervalle, partie majorée, minorée, bornée**. **Plus grand et plus petit élément**.
3. Borne inférieure, borne supérieure. Caractérisation.
4. L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel. Suites majorées, minorées, bornées.
5. Suites monotones. Suites extraites. Suites convergentes et divergentes : définitions.
6. Toute suite convergente est bornée. Suites extraites d'une suite convergente.
7. **Théorèmes** : opérations algébriques sur les limites, limite et relation d'ordre (passage à la limite). Monotonie et convergence : suite croissante majorée/non majorée (Théorème de la limite monotone).

← Sem. 16 début

8. **Théorèmes d'encadrement**. Suites adjacentes : définition, convergence.
9. Relations de comparaison pour les suites : domination et prépondérance, équivalence de suites.
10. Propriétés de l'équivalence de suites : réfléxivité, symétrie, transitivité. Produit et quotient d'équivalents. Contre-exemples pour la somme ou la différence.
11. Comparaison des suites de références : si $\alpha > 0,\ \beta > 0$ et $a > 1$, $(\ln n)^\beta \ll n^\alpha \ll a^n \ll n!$
12. Suites complexes : définition, suites bornées, suites convergentes.
13. Une suite complexe est convergente ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent.
14. Opérations algébriques sur les limites de suites complexes.
15. Suites arithmético-géométriques. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (résultat seulement, sans démonstration qui viendra au moment des e.v. de dim. finie).
16. Étude d'une suite récurrente $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ continue sur I : vu uniquement en exercices.
17. Fonctions minorées, majorées et bornées. Extremums.
18. Borne supérieure d'une fonction majorée. Borne inférieure d'une fonction minorée.
19. Définition de limite (finie ou infinie) d'une fonction en un point ou en $\pm\infty$.
20. Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.

← Sem. 15 fin

21. Limite à gauche, à droite. Limites : propriétés liées à l'ordre. Théorème de la limite monotone.
22. Opérations algébriques sur les limites. Composition de limites.
23. Continuité en un point ; utilisation de suites. Prolongement par continuité.
24. Fonction continue sur un intervalle. Espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. Composition de fonctions continues.
25. Fonction continue sur un segment (résultat admis).
26. Applications lipschitziennes : définition, exemples. Application contractante.
27. Lemme du TVI par suites adjacentes dichotomiques. Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de la bijection monotone (démontré partiellement).
28. Relations de comparaison pour les fonctions : domination et prépondérance, équivalence.
29. Caractérisations avec $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ Propriétés algébriques des relations de comparaison.
30. Si $f \sim_a g$ et $\lim_{x\to a} g(x) = l \in]0;+\infty] \setminus \{1\}$ ou 0^+, alors $\ln f \sim_a \ln g$. $e^u \sim_a e^v$ ssi $(u-v)(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
31. Comparaison des fonctions de référence en 0 et $+\infty$.
32. Fonctions à valeurs complexes. Limites, continuité : opérations algébriques.
33. Caractérisations des limites ou de la continuité par l'utilisation des parties réelles et imaginaires.
34. Dérivabilité en un point des fonctions réelles. Dérivabilité à droite, à gauche.
35. Equivalence avec la différentiabilité en un point (ç-à-d l'existence d'un DL d'ordre 1).

← Sem. 16 fin

Questions de cours relatives au programme de colles

1. Définition de suite réelle convergente. Preuve de l'unicité de la limite.
2. Limite d'une somme de 2 suites convergentes **ou** du produit de 2 suites convergentes.
3. Définition de suites adjacentes. Preuve de la convergence des suites adjacentes.
4. Définition de la relation de domination. Définition de la relation de prépondérance, caractérisation.
5. Définition de l'équivalence de suites. Caractérisation.
6. Théorème de la suite croissante (majorée/non majorée) : énoncé + preuve.
7. Définition de la limite (finie ou infinie) d'une fonction en un point ou en $\pm\infty$
8. Preuve de la proposition : si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.
9. Preuve du théorème de la limite monotone : fonction croissante majorée/non majorée.
10. Preuve du lemme : si $g \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ vérifie $g(a)g(b) \leq 0$, il existe $c \in [a;b]$ tel que $g(c) = 0$.
11. Preuve du théorème des valeurs intermédiaires.

Semaine 15
n°1 à 6

Semaine 16
n°5 à 11