PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaines 13 et 14

du lundi 7 janvier 2025 au samedi 19 janvier 2025

← Sem. 13 début

1. Définition de matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$. Notation $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Matrice d'un système, matrice complète (revoir un précédent chapitre).
2. Matrices colonnes et matrices lignes d'une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
3. L'espace vectoriel $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Base canonique (pas de notion générale) : elle est formée des matrices élémentaires E_{ij}.
4. Revoir tout ce qui a été vu dans un précédent chapitre sur les systèmes linéaires. **Exercices**.
5. Definition du produit d'une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice-colonne $X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. **formule**, calcul pratique.
6. Interprétation matricielle d'un système sous la forme $Y = AX$. Structure de l'ensemble des solutions. Linéarité de $\varphi : \mathrm{M}_{p1}(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K}),\ X \mapsto AX$ lorsque $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$.

← Sem. 14 début

7. Définition du produit de deux matrices pour obtenir l'associativité : **formule** et calcul pratique. Propriétés : bilinéarité, matrice identité, distributivité par rapport à l'addition. Identité neutre.
8. Espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Le produit est une loi de composition interne sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Puissances de matrices et formule du binôme sous condition de commutativité.
9. Matrices triangulaires et diagonales : $T_n^+(\mathbb{K})$, $T_n^-(\mathbb{K})$ et $D_n(\mathbb{K})$ sont des sev de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
10. Multiplication d'une matrice par des matrices de la base canonique (à gauche et à droite).
11. Multiplication par des matrices d'opération élémentaire (dilatation, permutation, transvection) : opérations correspondantes sur lignes et colonnes.
12. Traduction matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan [Très rapidement : on multiplie à gauche par des matrices d'opération élémentaire].
13. Transposition. Linéarité. Transposée d'un produit.
14. Matrices symétriques et antisymétriques. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
15. Espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Le produit est une loi de composition interne sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Puissances de matrices et formule du binôme. Matrices triangulaires et diagonales.
16. Multiplication d'une matrice par des matrices de la base canonique (à gauche et à droite). Multiplication par des matrices d'opération élémentaire (dilatation, permutation, transvection).
17. Matrices inversibles. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (stabilité par multiplication et passage à l'inverse, pas de notion générale de groupe).
18. **Propriété fondamentale** : si $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \in T_n^+(\mathbb{K})$, alors A inversible ssi $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$
19. Caractérisations : si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$(A \text{ inversible}) \Leftrightarrow (A \text{ inversible à gauche}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} AX = 0_{n1} \text{ n'a que} \\ \text{la solution nulle} \end{pmatrix}$$

puis $\qquad (A \text{ inversible}) \Leftrightarrow (A \text{ inversible à droite})$

20. Inversion en lignes (résolution d'un système linéaire). Méthode du pivot de Gauss pour le calcul de l'inverse d'une matrice inversible. Exemples.

← Sem. 13 fin

21. Ensemble des nombre réels : propriétés. **Revoir les notions du chapitre 02** : **intervalle, partie majorée, minorée, bornée**. **Plus grand et plus petit élément**.
22. Borne inférieure, borne supérieure. Caractérisation.
23. L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel. Suites majorées, minorées, bornées.
24. Suites monotones. Suites extraites. Suites convergentes et divergentes : définitions.
25. Toute suite convergente est bornée. Suites extraites d'une suite convergente.
26. **Théorèmes** : opérations algébriques sur les limites, limite et relation d'ordre (passage à la limite). Monotonie et convergence : suite croissante majorée/non majorée (Théorème de la limite monotone).
27. **Théorèmes d'encadrement**. Suites adjacentes : définition, convergence.

← Sem. 14 fin

Questions de cours relatives au programme de colles

Semaine 13
n°1 à 6

Semaine 14
n°6 à 11

1. Définition du produit d'une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice-colonne de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Formule.
2. Définition du produit de deux matrices. Formule. Savoir faire un produit.
3. Définition de matrice triangulaire. Produit de matrices triangulaires (avec preuve).
4. Formule du binôme pour les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. (avec preuve).
5. Définition de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Stabilité par multiplication et passage à l'inverse (énoncé+preuve).
6. Définition de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Explications de la méthode du pivot de Gauss pour le calcul de l'inverse.
7. Définition de plus grand élément/plus petit élément d'une partie de $\mathbb{R}$. Définition de borne inf/sup.
8. Définition de suite réelle convergente. Preuve de l'unicité de la limite.
9. Limite d'une somme de 2 suites convergentes **ou** du produit de 2 suites convergentes.
10. Théorème de la suite croissante (majorée/non majorée) : énoncé + preuve.
11. Définition de suites adjacentes. Preuve de la convergence des suites adjacentes.