PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaines 13 et 14

du lundi 10 janvier 2022 au samedi 22 janvier 2022

1. Définition de matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$. Notation $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Matrice d'un système, matrice complète (revoir un précédent chapitre). Semaine 13 début
2. Matrices colonnes et matrices lignes d'une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
3. L'espace vectoriel $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Base canonique (pas de notion générale) : elle est formée des matrices élémentaires E_{ij}.
4. Revoir tout ce qui a été vu dans un précédent chapitre sur les systèmes linéaires. **Exercices**.
5. Definition du produit d'une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice-colonne $X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. **formule**, calcul pratique.
6. Interprétation matricielle d'un système sous la forme $Y = AX$. Structure de l'ensemble des solutions. Linéarité de $\varphi : \mathrm{M}_{p1}(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K}),\ X \mapsto AX$ lorsque $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$.
7. Définition du produit de deux matrices pour obtenir l'associativité : **formule** et calcul pratique. Propriétés : bilinéarité, matrice identité, distributivité par rapport à l'addition. Identité neutre. Semaine 14 début
8. Espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Le produit est une loi de composition interne sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Puissances de matrices et formule du binôme sous condition de commutativité.
9. Matrices triangulaires et diagonales : $T_n^+(\mathbb{K})$, $T_n^-(\mathbb{K})$ et $D_n(\mathbb{K})$ sont des sev de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
10. Multiplication d'une matrice par des matrices de la base canonique (à gauche et à droite).
11. Multiplication par des matrices d'opération élémentaire (dilatation, permutation, transvection) : opérations correspondantes sur lignes et colonnes.
12. Traduction matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan [Très rapidement : on multiplie à gauche par des matrices d'opération élémentaire].
13. Transposition. Linéarité. Transposée d'un produit.
14. Matrices symétriques et antisymétriques. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
15. Espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Le produit est une loi de composition interne sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Puissances de matrices et formule du binôme. Matrices triangulaires et diagonales.
16. Multiplication d'une matrice par des matrices de la base canonique (à gauche et à droite). Multiplication par des matrices d'opération élémentaire (dilatation, permutation, transvection).
17. Matrices inversibles. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (stabilité par multiplication et passage à l'inverse, pas de notion générale de groupe).
18. **Propriété fondamentale** : si $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \in T_n^+(\mathbb{K})$, alors A inversible ssi $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$
19. Caractérisations : si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$(A \text{ inversible}) \Leftrightarrow (A \text{ inversible à gauche}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} AX = 0_{n1} \text{ n'a que} \\ \text{la solution nulle} \end{pmatrix}$$

$$\textbf{puis} \qquad (A \text{ inversible}) \Leftrightarrow (A \text{ inversible à droite})$$

20. Inversion en lignes (résolution d'un système linéaire). Méthode du pivot de Gauss pour le calcul de l'inverse d'une matrice inversible. Exemples.
21. Ensemble des nombre réels : propriétés. **Revoir les notions du chapitre 02** : **intervalle, partie majorée, minorée, bornée**. **Plus grand et plus petit élément**.
22. Borne inférieure, borne supérieure. Caractérisation. Semaine 13 fin
23. L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel. Suites majorées, minorées, bornées.
24. Suites monotones. Suites extraites. Suites convergentes et divergentes : définitions.
25. Toute suite convergente est bornée. Suites extraites d'une suite convergente.
26. **Théorèmes** : opérations algébriques sur les limites, limite et relation d'ordre (passage à la limite). Monotonie et convergence : suite croissante majorée/non majorée (Théorème de la limite monotone).
27. **Théorèmes d'encadrement**. Suites adjacentes : définition, convergence. Semaine 14 fin

Questions de cours relatives au programme de colles

1. Définition du produit d'une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice-colonne de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Formule. Semaine 13 début
2. Définition du produit de deux matrices. Formule. Savoir faire un produit.
3. Définition de matrice triangulaire. Produit de matrices triangulaires (avec preuve).
4. Formule du binôme pour les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. (avec preuve).
5. Définition de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Stabilité par multiplication et passage à l'inverse (énoncé+preuve). Semaine 14 début
6. Définition de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Explications de la méthode du pivot de Gauss pour le calcul de l'inverse.
7. Définition de plus grand élément/plus petit élément d'une partie de $\mathbb{R}$. Définition de borne inf/sup. Semaine 13 fin
8. Définition de suite réelle convergente. Preuve de l'unicité de la limite.
9. Limite d'une somme de 2 suites convergentes **ou** du produit de 2 suites convergentes.
10. Théorème de la suite croissante (majorée/non majorée) : énoncé + preuve.
11. Définition de suites adjacentes. Preuve de la convergence des suites adjacentes. Semaine 14 fin