PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaines 07 et 08

du lundi 15 novembre 2021 au samedi 27 novembre 2021

1. Propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$. Extension de formules algébriques vues dans $\mathbb{R}$: somme des termes d'une progression géométrique, factorisation de $b^n - a^n$ pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et formule du binôme dans $\mathbb{C}$. Ex : $2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{10} = ?$/Factorisation de $z^3 - 1/(2+i)^5 = ?$ Semaine 7 début
2. Affixe d'un point, image d'un nombre complexe. Affixe de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de celles de A et B.
3. Inverse d'un nombre complexe non nul, utilisation du conjugué pour obtenir une forme algébrique.
4. Module d'un nombre complexe : propriétés du module, interprétation géométrique. Inégalité triangulaire. Le module est une norme sur $\mathbb{C}$. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.
5. Argument d'un nombre complexe non nul. Interprétation géométrique $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) [2\pi]$.
6. Formules d'Euler et de Moivre. Exponentielle complexe : c'est une application surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$. (pas de définition générale de la surjectivité)
7. Racines carrées de réels dans $\mathbb{C}$. Équations du second degré à coefficients réels.
8. Racines carrées de complexes dans $\mathbb{C}$. Équations du second degré à coefficients complexes.
9. Racines n-ièmes de l'unité. Somme des racines n-ièmes de 1. Racines n-ièmes d'un nombre complexe. Semaine 8 début
10. Représentation complexe de certaines transformations du plan : translation/homothétie/rotation/symétrie d'axe (Ox).
11. Exemples de calculs de sommes, de développement de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$: $e^{in\theta}$ + Moivre + binôme.
12. Exemples de linéarisation de $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$: Euler + binôme + Moivre + Euler.
13. Définition d'une application, exemples d'applications. Composition, restriction, prolongement.
14. Utilisation d'un schéma fonctionnel pour représenter des composées de fonctions. Associativité de la composition.
15. Injections, surjections, bijections. Exemples. Composée de deux injections, surjections, bijections.
16. Application réciproque d'une bijection : $\forall f \in \mathrm{Bij}(E,F),\ \exists! g : F \to E,\ f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
17. Questions sur l'injectivité et la surjectivité de l'application
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x,y) \longmapsto (x+y, xy)$$
Comment restreindre l'ensemble de départ ou d'arrivée pour obtenir une fct. injective, surjective ?
18. Image directe d'une partie par une application, exemples dont image directe d'une réunion.
19. **Compétence** : Si $f : E \to F$, $A \subset E$ et $y \in F$, alors $y \in f(A)$ **ssi** $(\exists x \in A,\ y = f(x))$. Semaine 7 fin
20. Image réciproque d'une partie par une application, exemples dont image réciproque d'une réunion, d'une intersection. **Compétence** : Si $f : E \to F$, $B \subset F$ et $x \in E$, alors $x \in f^{-1}(B)$ **ssi** $f(x) \in B$.

On admet le théorème de la bijection continue et sur la dérivabilité d'une fonction réciproque

21. **Fonctions circulaires réciproques :** arcsin, arccos, arctan**. Dérivées. Pour tout** $x \in [-1;1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$**.** et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \varepsilon \frac{\pi}{2}$ avec $\varepsilon = \mathrm{signe}(x)$.
22. Fonction logarithme, exponentielle (dans cet ordre). Fonctions puissances, limites en 0^+ et $+\infty$.
23. Fonctions hyperboliques directes : sh, ch avec leurs dérivées. Fonction th abordée. Propriétés. Semaine 8 fin

Questions de cours relatives au programme de colles

1. Méthode de recherche de racines carrées d'un complexe donné sous forme algébrique. Exemple. Semaine 7 début
2. Méthode de recherche des racines n-ièmes d'un complexe non réel dans $\mathbb{C}$. Savoir donner un exemple.
3. Définition de surjection et d'injection. Caractérisations d'une injection, d'une surjection. **Savoir donner des exemples**. Définition de bijection. Semaine 8 début
4. Composée de deux injections, de deux surjections : énoncés + preuves.
5. Preuve du théorème (ou d'une partie) : $\forall f \in \mathrm{Bij}(E,F),\ \exists! g : F \to E,\ f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
6. Définition d'image directe et réciproque d'une partie par une application. Semaine 7 fin
7. Preuve de l'équation fonctionnelle de ln : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y$.
8. Définition, dérivée et courbe de arcsin, arccos, arctan.(preuve du calcul de la dérivée)
9. Définition et dérivée de sh, ch, th. Courbes représentatives. **[Demander l'étude des 3 fcts.]**. Semaine 8 fin