PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaines 23 et 24

du lundi 29 mars 2021 au samedi 10 avril 2021

Semaine 23

1. **Tout exercice sur les polynômes ...**
2. Définition d'espace vectoriel. Exemples. Règles de calcul, propriété de régularité.
3. Systèmes de vecteurs. Combinaisons linéaires.
4. Sous-espaces vectoriels. Propriété caractéristique.
5. Sous-espace vectoriel engendré par un système de vecteurs.
6. Somme de sous-espaces vectoriels. Somme directe, sous-espaces supplémentaires.
7. Applications linéaires. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$.
8. Composition de deux applications linéaires. Inverse d'une application linéaire.
9. Image directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.
10. Caractérisation des applications linéaires injectives et surjectives à l'aide de $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$.
11. Ensemble des solutions d'une équation linéaire.
12. Système libre et système lié. Base d'un ev : système libre et générateur ; extension aux familles.
13. Coordonnées d'un vecteur dans une base.
14. Détermination d'une application linéaire sur une base, sur des sev supplémentaires.
15. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une appl. linéaire par l'image d'une base.
16. $\mathcal{L}(E)$ et le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$. Projecteurs, projecteurs associés. Symétries.

Semaine 24

17. Dimension finie : existence d'une famille génératrice finie.
18. Théorème de la base extraite (d'une famille génératrice). Conséquence : tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{\vec{0}\}$ possède au moins une base finie.
19. Un système de $n + p$ vecteurs tous combinaison linéaire de n vecteurs $\big((n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2\big)$ est lié.
20. Définition de la dimension : dans un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{\vec{0}\}$, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.
21. Dans un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,
    — toute famille libre possède au plus n vecteurs.
    — toute famille libre de n vecteurs est une base.
22. Énoncé équivalent pour les familles génératrices. Théorème de la base incomplète (les vecteurs ajoutés peuvent être choisis dans une famille génératrice donnée).
23. Dimension de l'espace produit. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.
24. Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie possède un supplémentaire.
25. Formule de Grassmann : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
26. F et G sont en somme directe dans E ssi $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.
27. Définition (et uniquement cela pour l'instant) du rang d'une famille de vecteurs.
28. Isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie : $E \simeq F \Leftrightarrow \dim E = \dim F$.
29. Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$: si E et F sont de dimension finie, $\dim \mathcal{L}(E, F) = (\dim E)(\dim F)$.
30. Rang d'une application linéaire définie entre deux espaces vectoriels de dimension finie.
31. Formule du rang : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim E = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$.
32. Équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim E = \dim F$.

Questions de cours relatives au programme de colles

1. Relations coefficients-racines pour les polynômes de degré 2 (cours du début d'année) et de degré 3. Semaine 23 début
2. Définition de sous-espace vectoriel. Propriété caractéristique. Définition d'une application linéaire.
3. Sous-espace vectoriel engendré par un système de vecteurs : énoncé et démonstration.
4. Définition de somme directe **et** caractérisation. Définition de sous-espaces supplémentaires. Semaine 24 début
5. Composition d'applications linéaires, réciproque d'une application linéaire : énoncé et preuve.
6. Image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire : énoncé et preuve.
7. Définition de système libre et de système lié. Définition de base.
8. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire par l'image d'une base : énoncé et preuve.
9. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire f par Ker$f$ et Imf : énoncé et preuve. Semaine 23 fin
10. Définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie et justification.
11. Théorème de la base incomplète : énoncé seulement.
12. Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie possède un supplémentaire : preuve. Semaine 24 fin