

S₀₇ Oscillateurs amortis

PCSI₂ 2020 – 2021

Introduction : Les blocs 6, 7 et 8 abordent l'étude des circuits linéaires du premier et du second ordre en régime libre puis forcé, et une introduction au filtrage linéaire. Il s'agit avant tout de comprendre les principes des outils utilisés, et leur exploitation pour étudier le comportement d'un signal traversant un système linéaire. Ainsi l'évaluation ne peut-elle porter sur le tracé d'un diagramme de Bode à partir d'une fonction de transfert, ou sur la connaissance a priori de catalogues de filtres. Cependant, le professeur pourra, s'il le souhaite, détailler sur l'exemple simple du filtre du premier ordre le passage de la fonction de transfert au diagramme de Bode. L'objectif est bien plutôt ici de comprendre le rôle central de la linéarité des systèmes pour interpréter le signal de sortie. L'étude de régimes libres à partir de portraits de phase est une première introduction à l'utilisation de tels outils qui seront enrichis dans le cours de mécanique pour aborder la physique non linéaire.

I Oscillateurs amortis en régime transitoire

1. Oscillateur mécanique amorti par frottements fluides

a. Dispositif et conditions initiales

Le modèle de l'oscillateur harmonique étudié lors du chapitre S₀₁ peut être complété en tenant compte de frottements qui vont forcément apparaître lors du mouvement.

On adopte ici le modèle du frottement fluide en introduisant une force de frottement qui s'oppose toujours au déplacement et dont l'intensité est proportionnelle à la vitesse $\vec{f} = -\alpha \cdot \vec{v}$ avec $\alpha > 0$ constant.

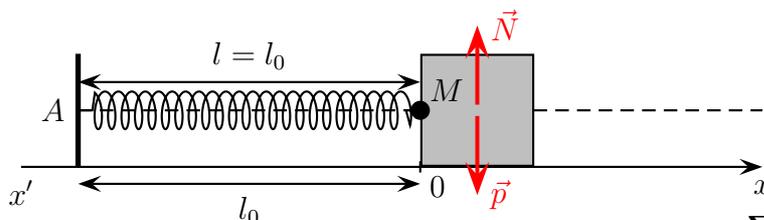


FIGURE 1 – Oscillateur mécanique, position d'équilibre : $\sum \vec{F} = \vec{0}$

On pose par exemple $x = 0$ lorsque $l = l_0$: lorsque le ressort est à sa longueur à vide l_0 .

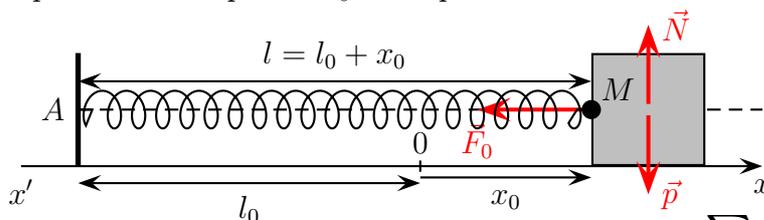


FIGURE 2 – Oscillateur mécanique, conditions initiales : $\sum \vec{F} = \vec{F}_0 \neq \vec{0}$

On déplace ensuite le solide de masse m , repéré par M d'une distance x_0 et on le lâche sans vitesse initiale. Ce sont les conditions initiales : $x(0) = x_0$ et $v(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Comme la somme des forces n'est plus nulle, il y aura mise en mouvement dès qu'on lâchera la masse.

b. Comportement du système



ressort-horizontal-et-masse-avec-frottements-fluides



Contrairement au cas de l'oscillateur harmonique qui oscillait pendant une durée idéalement infinie, on s'aperçoit que le système va rejoindre sa position d'équilibre initiale au bout d'un certain temps.

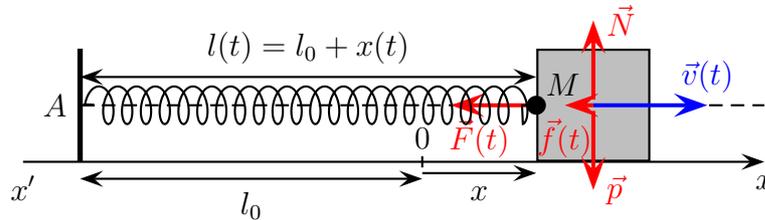


FIGURE 3 – Oscillateur mécanique à un instant t quelconque : $\sum \vec{F} = \vec{F}(t) + \vec{f}(t)$

On est donc en présence d'un système qui subit un régime transitoire entre deux régimes permanents.

En traçant l'évolution de la position en fonction du temps $x(t)$ et le portrait de phase $v(x)$ on obtient par exemple ces courbes.

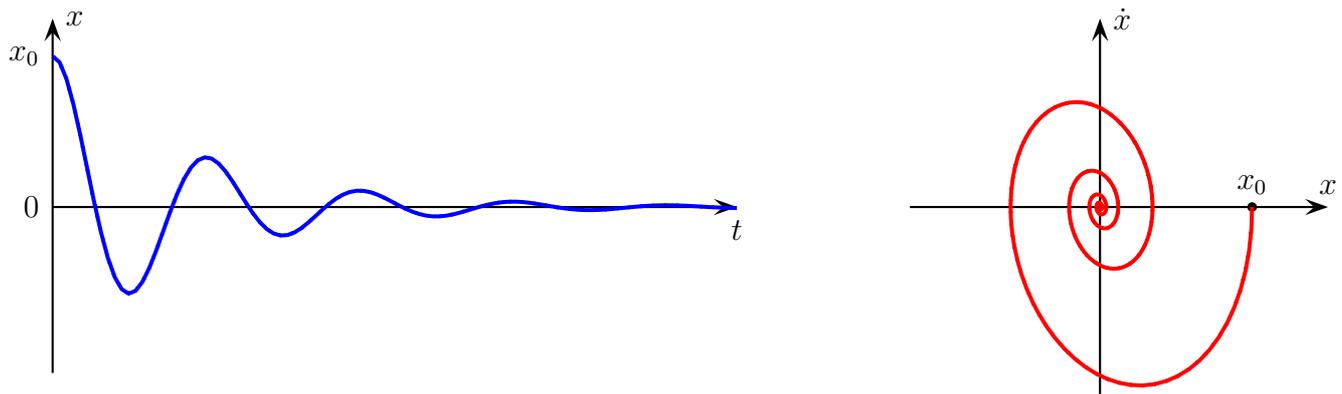


FIGURE 4 – Evolution temporelle de l'amplitude $x(t)$ et portrait de phase d'un oscillateur amorti

Remarque : les courbes obtenues dépendent des conditions initiales et de la valeur du coefficient de frottement α choisi.

c. Approche énergétique

Si on considère le système d'un point de vue énergétique :

- Initialement l'énergie était intégralement stockée dans le ressort :

$$E_m(0) = E_c(0) + E_p(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(l(0) - l_0)^2 = 0 + \frac{1}{2}k(l_0 + x_0 - l_0)^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$$

- Lors du régime transitoire de l'énergie est dissipée sous forme calorifique par les frottements, il y a diminution de l'énergie mécanique.
- À la fin du régime transitoire, le mobile est au repos $v(t_f) = 0$ en $x(t_f) = 0$ et $E_m(t_f) = 0$ a atteint sa valeur minimale, nulle ici.



oscillateur-horizontal

d. Mise en équation

En plus de la force de rappel élastique $\vec{F} = -k[l(t) - l_0] \cdot \vec{e}_x$ il faut tenir compte de la force de frottement $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ lors de la projection de la seconde loi de Newton (Cf. chapitre S₀₁).

Par projection du principe fondamental de la dynamique sur l'axe ($x'x$), on obtient maintenant

$$m\ddot{x} = -k(l - l_0) - \alpha\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Remarques :

- On détaillera la mise en équation à l'occasion des premiers chapitres de mécanique (Cf chapitre M₀₂).
- Pour ce type de problème, à un degré de liberté ($x(t)$ ici), on pourra utiliser une méthode énergétique (Cf chapitre M₀₂).

2. Comparaison avec un circuit RLC série en régime libre

a. Circuit et conditions initiales

On peut réaliser le circuit représenté ci-dessous

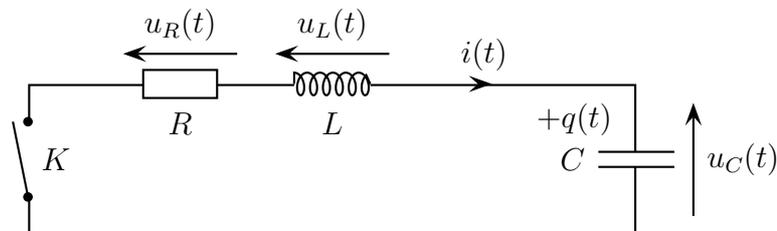


FIGURE 5 – Circuit RLC série en régime libre pour $t < 0$: K ouvert.

Et en choisissant de fermer l'interrupteur K à $t = 0$, le condensateur étant préalablement chargé et l'intensité nulle dans le circuit, les conditions initiales sont alors $q(0) = q_0$ et $i(0) = \dot{q}(0) = 0$.

Remarque : on a continuité de $q(t)$ et de $i(t) = i_L(t)$ d'où $q(0^+) = q(0^-) = q_0$ et $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

b. Réponse du circuit

En relevant $u_c(t) = \frac{q(t)}{C}$ à l'oscilloscope ou en traçant le portrait de phase $i(q)$ on obtient exactement le même type de courbe que pour l'oscillateur mécanique.



RLC-transitoire

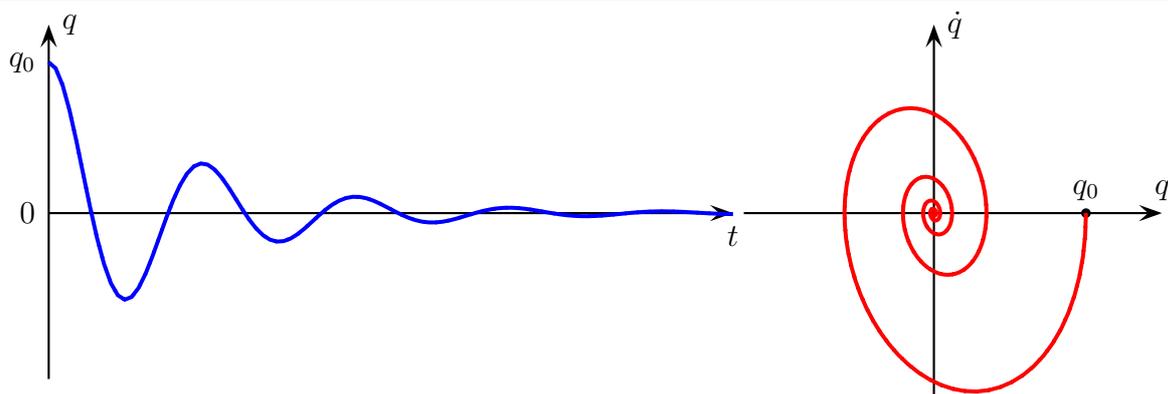


FIGURE 6 – Evolution temporelle de la charge $q(t)$ et portrait de phase d RLC série en régime libre

c. Approche énergétique

Si on considère le système d'un point de vue énergétique, les deux seuls dipôles qui peuvent stocker de l'énergie sont la bobine et le condensateur.

- Initialement l'énergie était intégralement stockée dans le condensateur :

$$E(0) = E_L(0) + E_C(0) = \frac{1}{2}Li_L^2(0) + \frac{1}{2}Cu_C^2(0) = 0 + \frac{1}{2}Cu_C^2(0) = \frac{q_0^2}{2C}$$

- Lors du régime transitoire de l'énergie est dissipée sous forme calorifique par effet Joule dans le résistor, il y a diminution de l'énergie.
- À la fin du régime transitoire c'est à dire en régime permanent le condensateur est déchargé $q(t_f) = 0$ et équivalent à un interrupteur ouvert $i(t_f) = 0$ d'où $E(t_f) = 0$ a atteint sa valeur minimale.

d. Mise en équation

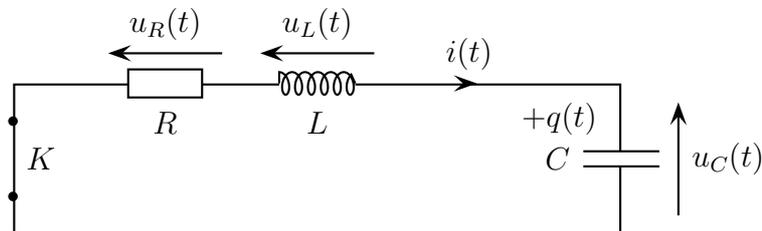


FIGURE 7 – Circuit RLC série en régime libre et $t \geq 0$, mise en équation.

On applique la loi des mailles par exemple dans le sens trigonométrique :

$$u_C(t) + u_L(t) + u_R(t) = 0$$

avec $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$, $u_R(t) = Ri(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$ et $u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$ d'où

$$\frac{q(t)}{C} + L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{q(t)}{LC} = 0$$

Remarque : on a le même type d'équation en $u_C(t)$ (et $i(t)$).

3. Equation canonique, analogie

a. Similitudes

Dans chaque cas on obtient une équation différentielle du deuxième ordre, linéaire, à coefficients constants (qui doivent être tous du même signe pour que le système soit stable) et avec second membre (sauf si régime libre).

À chaque fois qu'on aura affaire à un système oscillant du second ordre on retrouvera une équation différentielle de ce type.

Remarque : on peut réaliser un circuit du second ordre avec deux condensateurs. On obtiendra alors une équation de la même forme mais dans laquelle évidemment aucune inductance L n'apparaîtra.

b. Equation canonique

Afin de procéder par identification et analogie au lieu de refaire tous les calculs à chaque fois, on met l'équation sous forme dite "canonique" :

$$\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \text{"quelque chose"}$$

en introduisant les paramètres suivants :

- ω_0 est la pulsation propre du circuit en radian seconde moins un (rad.s^{-1}) : $[\omega_0] = \text{T}^{-1}$.
- Q le facteur de qualité, nombre sans dimension : $[Q] = 1$.

Remarque : on travaille parfois aussi avec les formes suivantes :

$$\ddot{x}(t) + \frac{2}{\tau}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \text{"quelque chose"} \quad \text{avec } \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \text{ le temps de relaxation du système.}$$

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \text{"quelque chose"} \quad \text{avec } \xi = \frac{1}{2Q} \text{ le facteur d'amortissement du système.}$$

c. Identification pour chaque système

Pour déterminer l'expression des paramètres ω_0 et Q précédents il faut procéder par identification après avoir écrit l'équation obtenue sous la forme canonique.

Cas de l'oscillateur mécanique : on identifie les coefficients des équations

$$\ddot{x}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \text{quelque chose}$$

- La fonction étudiée est l'élongation $x(t) = l(t) - l_0$ du ressort,
- On identifie

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{la pulsation propre de l'oscillateur.}$$

- On a ensuite

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} \quad \text{son facteur de qualité.}$$

- On peut également donner l'ordre de grandeur de τ le temps de relaxation en utilisant

$$\frac{2}{\tau} = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \tau = \frac{2m}{\alpha}$$

La durée du régime transitoire dépend de τ et de Q .

Remarque : on n'a pas $4,5\tau$ car il ne s'agit pas d'un système du premier ordre.

- Enfin, on a directement "quelque chose" nul ici ce qui caractérise d'un régime libre.

Remarques :

- La dimension de α se déduit de son expression :

$$[\alpha] = \left[\frac{2m}{\tau} \right] = \frac{M}{T} = M.T^{-1} \Rightarrow \text{unité légale kg.s}^{-1}$$

- On retrouve bien des oscillations "pendant un temps infini" en l'absence de frottements, c'est à dire lorsque α tend vers 0.

Cas du circuit RLC série en régime libre : de la même manière,

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{q(t)}{LC} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \ddot{q}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = \text{quelque chose}$$

- La fonction étudiée est la charge $q(t)$ ou souvent la tension $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ aux bornes du condensateur car visible directement à l'aide d'un oscilloscope.

- On identifie

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{la pulsation propre du circuit.}$$

- On a ensuite

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{son facteur de qualité.}$$

- Le temps de relaxation τ du régime transitoire est tel que

$$\frac{2}{\tau} = \frac{R}{L} \Rightarrow \tau = \frac{2L}{R}$$

- Enfin, on a nouveau "quelque chose" nul si régime libre.

d. Analogie électro-mécanique

En comparant directement les équations

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \leftrightarrow \quad \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Électronique	charge q	admittance L	capacité C	résistance R
Mécanique	élongation x	masse m	inverse constante rappel $1/k$	frottement α

On retrouve :

Électronique	intensité i	puls. propre $\sqrt{\frac{1}{LC}}$	fact. qualité $\frac{L\omega_0}{R}$	énergie $\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2C}q^2$
Mécanique	vitesse v	puls. propre $\sqrt{\frac{k}{m}}$	fact. qualité $\frac{m\omega_0}{\alpha}$	énergie $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

FIGURE 8 – Analogie électro-mécanique

4. Résolution de l'équation différentielle en régime libre, sol_H

On travaillera avec la forme canonique avant de différentier les deux systèmes, on cherche donc la solution sol_H de l'équation sans second membre

$$\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

dans le cas des conditions initiales choisies $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$

La forme des solutions d'une telle équation dépend du signe du discriminant de l'équation caractéristique

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$$

qui dépend lui-même uniquement de la valeur de Q .

Selon la valeur de Q , on obtient donc différents régimes.

a. Régime apériodique



$$\Delta > 0 \Rightarrow 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right) > 0 \Rightarrow Q < \frac{1}{2} \iff \xi > 1 \text{ amortissement important}$$

l'équation caractéristique admet deux racines

$$r_1 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - \sqrt{\Delta}}{2} = -\omega_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right) < 0 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2} = -\omega_0 \left(\frac{1}{2Q} - \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right) < 0$$

réelles négatives et la solution est de la forme $A.e^{r_1 t} + B.e^{r_2 t}$.

Le facteur dans l'exponentielle est forcément sans dimension, on pose alors $\tau_1 = -\frac{1}{r_1}$ et $\tau_2 = -\frac{1}{r_2}$ positives et homogènes à des durées.

La solution prend alors la forme

$$x(t) = A e^{-\frac{t}{\tau_1}} + B e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

Comme dans le cas d'un système du premier ordre, on a fait apparaître des constantes d'intégration, il y en a deux ici car le système est du second ordre. On pourra les déterminer en utilisant les deux conditions initiales choisies.

Circuit électrique : on se souvient que



$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow Q < \frac{1}{2} \iff R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_c \text{ la résistance critique du circuit.}$$

- Par continuité de la charge du condensateur $q(t)$, à $t = 0^+$,

$$q(0^+) = q(0^-) \Rightarrow A.e^0 + B.e^0 = q_0 \Rightarrow A + B = q_0 \Rightarrow B = q_0 - A$$

- Par continuité de l'intensité du courant dans la bobine

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{A}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{B}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

et à $t = 0^+$,

$$i(0^+) = i(0^-) \Rightarrow \frac{A}{\tau_1} + \frac{B}{\tau_2} = 0 \Rightarrow A = -\frac{\tau_1 B}{\tau_2} = -\frac{\tau_1}{\tau_2} (q_0 - A) \Rightarrow -\tau_2 A = \tau_1 q_0 - \tau_1 A$$

$$\Rightarrow A = \frac{\tau_1 q_0}{\tau_1 - \tau_2} \quad \text{et} \quad B = -\frac{\tau_2}{\tau_1} A = -\frac{\tau_2 q_0}{\tau_1 - \tau_2}$$

et finalement :

$$q(t) = \frac{q_0}{\tau_1 - \tau_2} (\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}})$$

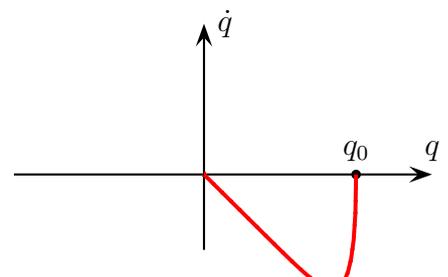
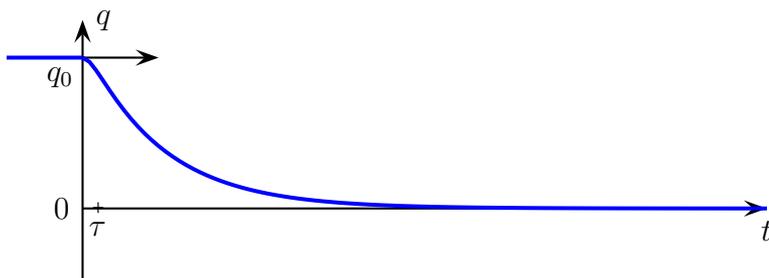


FIGURE 9 – $q(t)$ et portrait de phase RLC en régime apériodique ($Q = 0,3 < 0,5$)

Lors de ce régime on n'observe aucune oscillation.

En utilisant l'expression précédente, on peut en déduire l'expression et l'allure de

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{q_0}{\tau_1 - \tau_2} (-e^{-\frac{t}{\tau_1}} + e^{-\frac{t}{\tau_2}})$$

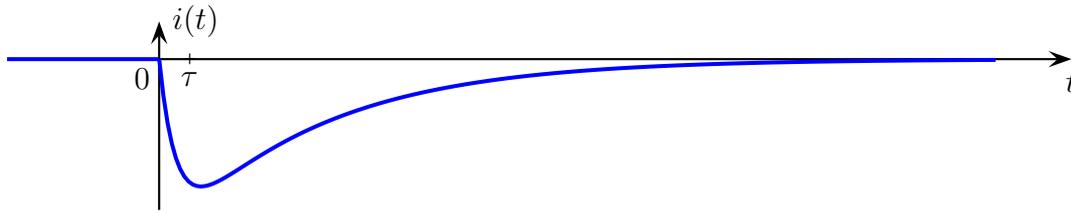


FIGURE 10 – $i(t)$ dans un RLC en régime libre, régime apériodique ($Q = 0,3 < 0,5$)

Remarque : il s'agit, à C près, de la pente de la courbe $q(t)$.

Oscillateur mécanique : si $\alpha > \alpha_c = 2\sqrt{mk}$ le coefficient de frottement critique, on obtiendra des résultats analogues en utilisant les conditions initiales similaires

$$x(0^+) = x(0^-) = x_0 \text{ et } \dot{x}(0^+) = \dot{x}(0^-) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{x_0}{\tau_1 - \tau_2} (\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}})$$



oscillateur-vertical

b. Régime critique

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right) = 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{2} \iff \xi = 1 \text{ amortissement critique}$$

l'équation caractéristique admet une seule racine

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\frac{1}{\tau} = -\omega_0$$

réelle négative et la solution est de la forme

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On détermine à nouveau les deux constantes en utilisant les deux conditions initiales choisies.

Circuit électrique : pour $R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

- Par continuité de la charge du condensateur $q(t)$,

$$q(0^+) = q(0^-) \Rightarrow (A + B \times 0)e^0 = q_0 \Rightarrow A = q_0$$

- Par continuité de l'intensité du courant dans la bobine

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = Be^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau}(A + Bt)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

et à $t = 0$,

$$i(0^+) = i(0^-) \Rightarrow Be^0 - \frac{1}{\tau}(A + 0)e^0 = 0 \Rightarrow B = \frac{A}{\tau} = \frac{q_0}{\tau}$$

et finalement :

$$q(t) = q_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = q_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\omega_0 t}$$

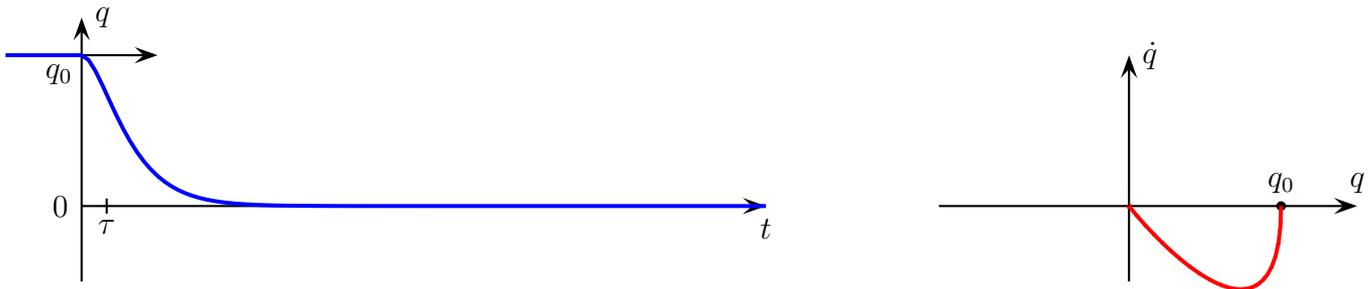


FIGURE 11 – $q(t)$ et portrait de phase RLC en régime critique $Q = 0,5$

On obtient la même forme pour $q(t)$ (et $i(t)$) mais le régime transitoire est plus court, le portrait de phase est plus “rond”.

Oscillateur mécanique : directement par analogie pour $\alpha = \alpha_c = 2\sqrt{mk}$ et avec les mêmes conditions initiales,

$$x(0^+) = x(0^-) = x_0 \text{ et } \dot{x}(0^+) = \dot{x}(0^-) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$



oscillateur-vertical

c. Régime pseudo-périodique

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right) < 0 \Rightarrow Q > \frac{1}{2} \iff \xi < 1 \text{ amortissement faible}$$

$$\Delta = -4\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) = \left[2j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right]^2 = [2j\omega]^2$$

où j représente le nombre complexe tel que $j^2 = -1$, c’est le i des mathématiciens mais on utilise plutôt j pour ne pas confondre avec l’intensité du courant.

En posant donc

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} > 0 \quad \text{la pseudo-pulsation du système, } \omega < \omega_0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \text{la pseudo-période du système, } T > T_0$$

Les deux racines de l’équation caractéristiques sont alors

$$r_1 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + j2\omega}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega \Rightarrow r_1 = -\frac{1}{\tau} + j\omega \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{1}{\tau} - j\omega$$

On retrouve $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$, le temps de relaxation qui caractérise la durée des phénomènes transitoires. La solution est alors de la forme

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

On détermine à nouveau les deux constantes en utilisant les deux conditions initiales choisies.

Circuit électrique : pour $R < R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

- Par continuité de la charge du condensateur $q(t)$,

$$q(0^+) = q(0^-) \Rightarrow e^0(A \cos 0 + B \sin 0) = q_0 \Rightarrow A = q_0$$

- Par continuité de l'intensité du courant dans la bobine

$$i = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} [A \cos \omega t + B \sin \omega t] + e^{-\frac{t}{\tau}} [-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t]$$

et à $t = 0$,

$$i(0^+) = i(0^-) \Rightarrow -\frac{A}{\tau} + B\omega = 0 \Rightarrow B = \frac{A}{\omega\tau} = \frac{q_0}{\omega\tau}$$

et finalement :

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos \omega t + \frac{1}{\omega\tau} \sin \omega t \right) = q_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left(\cos \omega t + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin \omega t \right)$$

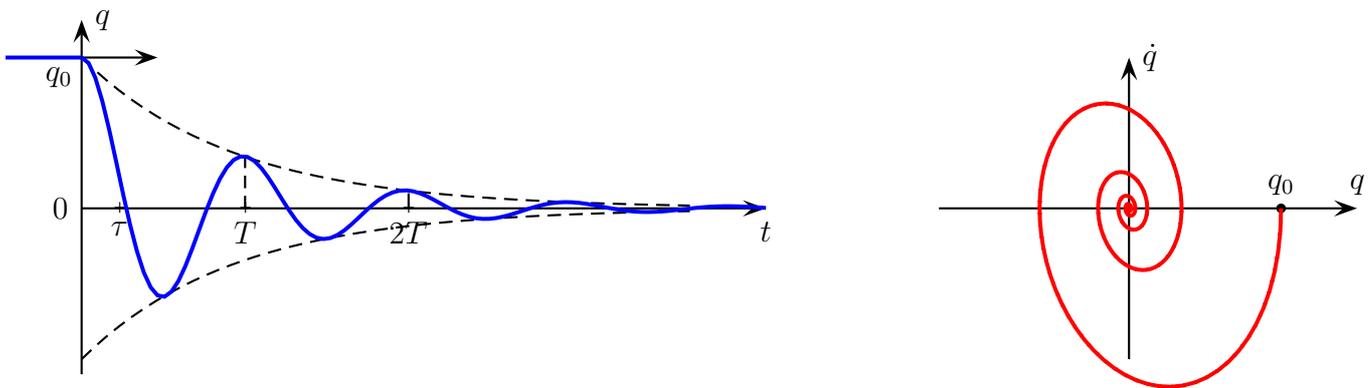


FIGURE 12 – $q(t)$ et portrait de phase RLC en régime pseudo-périodique ($Q = 3 > 0,5$)

On peut en déduire l'allure de $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ qui représente, à tout instant, la pente de la courbe précédente.

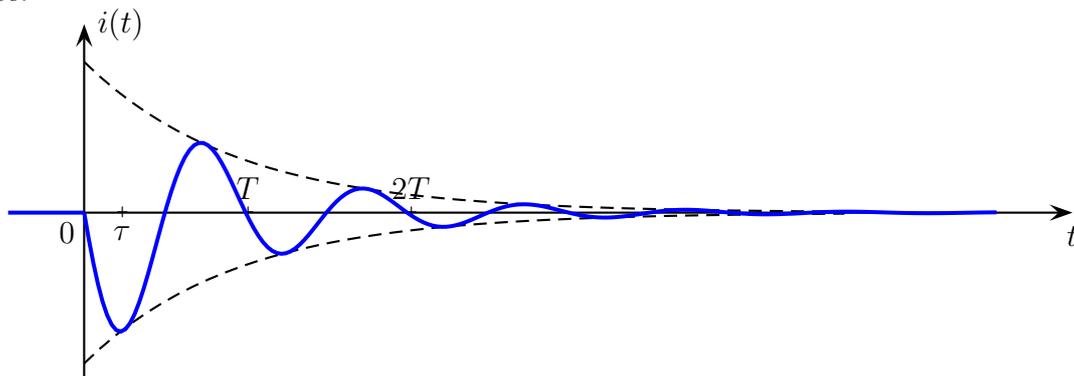


FIGURE 13 – $i(t)$ dans un RLC en régime libre, régime pseudo-périodique ($Q = 3 > 0,5$)

Remarques :

- Ces grandeurs oscillent à l'intérieur d'une enveloppe exponentielle $\pm e^{-\frac{t}{\tau}} = \pm e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$ qu'il faut tracer au préalable.
- On peut montrer que le nombre d'oscillations visibles correspond environ à la valeur de Q si Q est assez grand (supérieur à quelques unités).
- Dès que Q atteint quelques unités on peut simplifier

$$\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \simeq 1 \Rightarrow \omega \simeq \omega_0 \iff T \simeq T_0$$

Oscillateur mécanique : on obtiendra des résultats analogues pour $\alpha < \alpha_c = 2\sqrt{km}$ en utilisant les conditions initiales similaires

$$x(0^+) = x(0^-) = x_0 \text{ et } \dot{x}(0^+) = \dot{x}(0^-) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos \omega t + \frac{1}{\omega \tau} \sin \omega t \right)$$



oscillateur-vertical

d. Cas idéal du régime harmonique $Q \rightarrow \infty \Rightarrow \tau \rightarrow \infty \Rightarrow \xi \rightarrow 0$

On a alors le cas idéal il n'y a pas d'amortissement, c'est le cas particulier $Q \gg \frac{1}{2}$ pour lequel la partie réelle des racines est nulle.

L'équation différentielle prend alors la forme

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0 \iff \ddot{y}(t) = -\omega_0^2 y(t)$$

et les solutions sont de la forme :

$$y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

On détermine à nouveau les deux constantes en utilisant les deux conditions initiales choisies.

Circuit électrique : pour $R \ll R_c$

- Par continuité de la charge du condensateur $q(t)$,

$$q(0^+) = q(0^-) \Rightarrow A \cos 0 + B \sin 0 = q_0 \Rightarrow A = q_0$$

- Par continuité de l'intensité du courant dans la bobine

$$i = \frac{dq(t)}{dt} = -A\omega \sin \omega_0 t + B\omega \cos \omega_0 t$$

et à $t = 0$,

$$i(0^+) = i(0^-) \Rightarrow B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$$

et finalement :

$$q(t) = q_0 \cos \omega_0 t$$

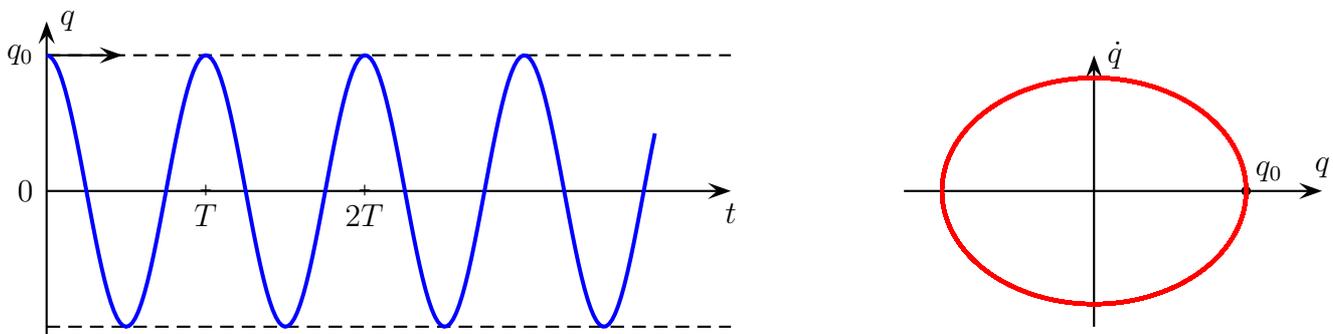


FIGURE 14 – $q(t)$ et portrait de phase RLC en régime harmonique $Q \rightarrow \infty$

On peut en déduire l'allure de $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t$ qui représente, à tout instant, la pente de la courbe précédente.

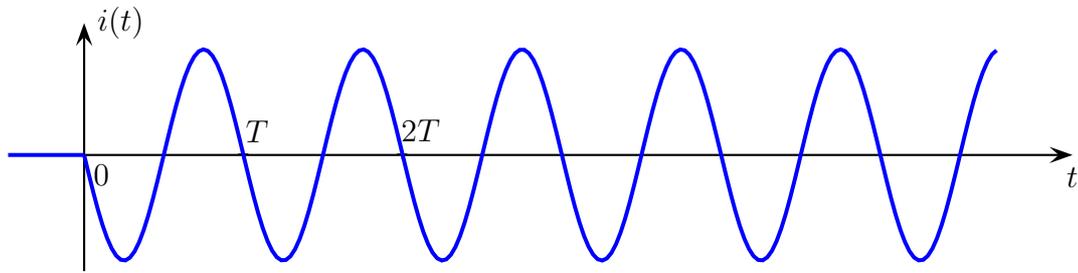


FIGURE 15 – $i(t)$ dans un RLC en régime libre, régime harmonique $Q \rightarrow \infty$

Remarques :

- On est dans le cas $Q \gg 1 \iff \tau \rightarrow \infty$, il n'y a pas de décroissance et $T = T_0$.
- Dans ce cas il y a échange perpétuel d'énergie entre le condensateur et la bobine.
- Dans la réalité, le cas $R = 0$ est impossible à obtenir car le circuit contient forcément des éléments résistifs qui dissipent de l'énergie sous forme de chaleur.
On peut néanmoins obtenir $R = 0$ en ajoutant un circuit qui simule une résistance négative.

Oscillateur mécanique : on obtiendra des résultats analogues pour $\alpha \ll \alpha_c$ en utilisant les conditions initiales similaires

$$x(0^+) = x(0^-) = x_0 \text{ et } \dot{x}(0^+) = \dot{x}(0^-) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$$

Echange perpétuel d'énergie entre énergie cinétique et potentielle, l'énergie mécanique restant constante.



oscillateur-horizontale

e. Comparaison des différents régimes

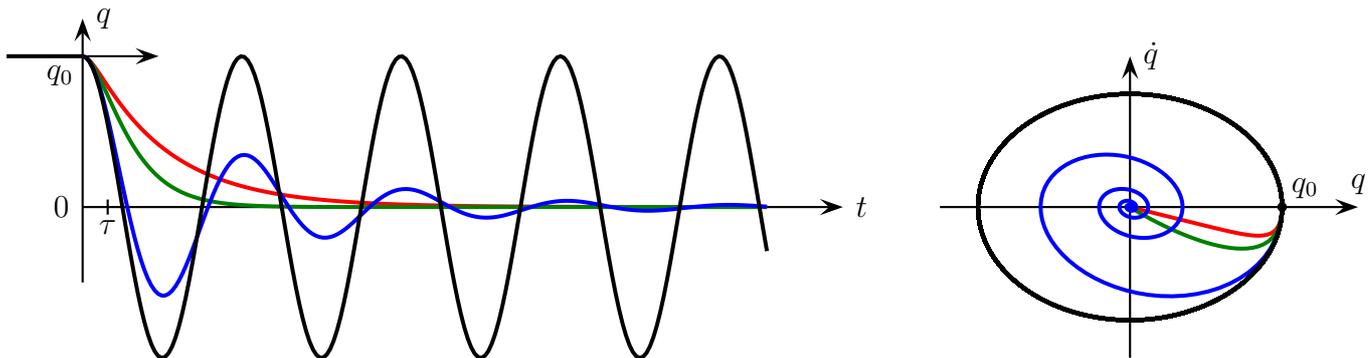


FIGURE 16 – $q(t)$ et portrait de phase RLC dans les différents régimes

5. Réponse à un échelon

a. Circuit et conditions initiales

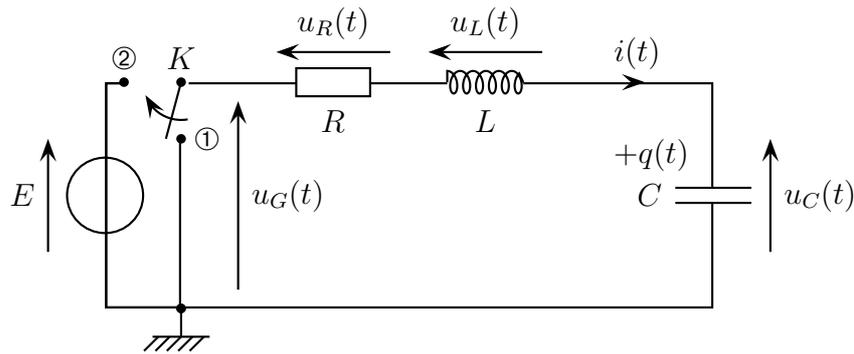


FIGURE 17 – Circuit RLC série subissant un échelon de tension.

Le condensateur étant initialement déchargé et l'intensité nulle dans le circuit, l'interrupteur passe de la position ① à ② à $t = 0$. On a alors $u_C(0^-) = 0$ et $u_G(0^+) = E$: échelon de tension.

b. Equation différentielle en $u_C(t)$, forme canonique.

On applique la loi des mailles : $u_G(t) - u_R(t) - u_L(t) - u_C(t) = 0$ avec pour $t > 0$, $u_G(t) = E$, $u_R(t) = Ri(t)$, $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ et $i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$ soit $u_L(t) = LC \frac{d^2u_C(t)}{dt^2}$ d'où

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + LC \frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + u_C(t) = E \iff \frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{LC} = \frac{E}{LC}$$

Equation en $u_C(t)$ qui s'écrit sous la forme canonique

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C(t)}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 E \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Cette équation comportant un second membre, sa solution est la somme

$$sol = sol_H + sol_P$$

avec sol_H la solution de l'équation différentielle homogène, sans second membre et sol_P la solution particulière, de même nature que le second membre, une simple constante ici.

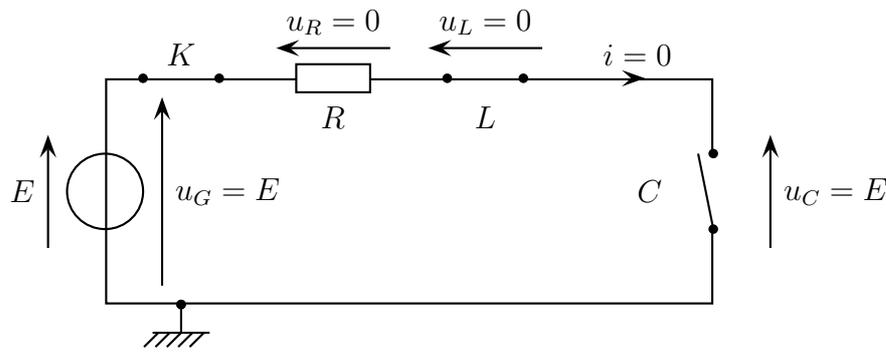
c. Résolution de l'équation différentielle : charge du condensateur

Solution homogène sol_H : elle est solution de

$$\ddot{u}_C(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

On va retrouver trois formes possible en fonction de Q le facteur de qualité, chaque forme correspond à un régime.

Solution particulière sol_P : comme à la fin de la charge le circuit est en régime permanent, la bobine se comporte comme un interrupteur fermé et le condensateur comme un interrupteur ouvert d'où le schéma suivant :

FIGURE 18 – Circuit RLC série en régime permanent

On aura donc à priori $u_C = E$ en régime permanent.

Vérification : si on remplace $u_C(t)$ par une constante D dans l'équation différentielle,

$$\ddot{D} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{D} + \omega_0^2 D = \omega_0^2 E \Rightarrow 0 + 0 + D = E \Rightarrow \text{sol}_P = E$$

Solution complète et tracé pour chaque régime

$$\text{sol} = \text{sol}_H + \text{sol}_P$$

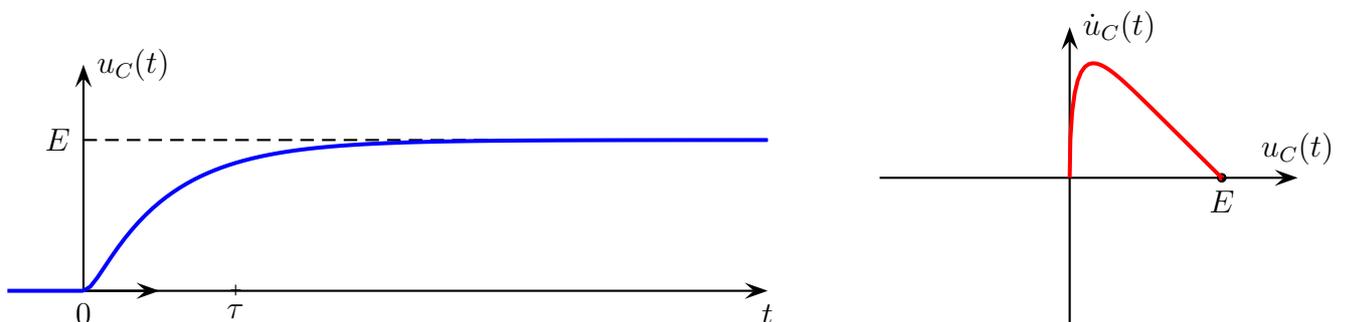
connue aux constantes d'intégration A et B de sol_H près. On détermine ces constantes en appliquant les conditions initiales **à la solution complète** sol :

- C initialement déchargé et continuité de $u_C(t)$ d'où $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$.
- Intensité du courant initialement nulle dans le circuit et continuité de $i_L(t)$ d'où $i_L(0^+) = i_L(0^-) = i(0^-) = 0$ avec $i = i_C = C \frac{du_C}{dt}$ d'où une tangente à l'origine nulle.

On tient compte également de la valeur de Q , à calculer en fonction des données du problème :

- si $Q < \frac{1}{2}$ le système est en régime aperiodique et

$$u_C(t) = A \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + B \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) + E$$

FIGURE 19 – Réponse du circuit RLC série en régime aperiodique ($Q < \frac{1}{2}$).

- si $Q = \frac{1}{2}$ le système est en régime critique et

$$u_C(t) = (A + Bt) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E$$

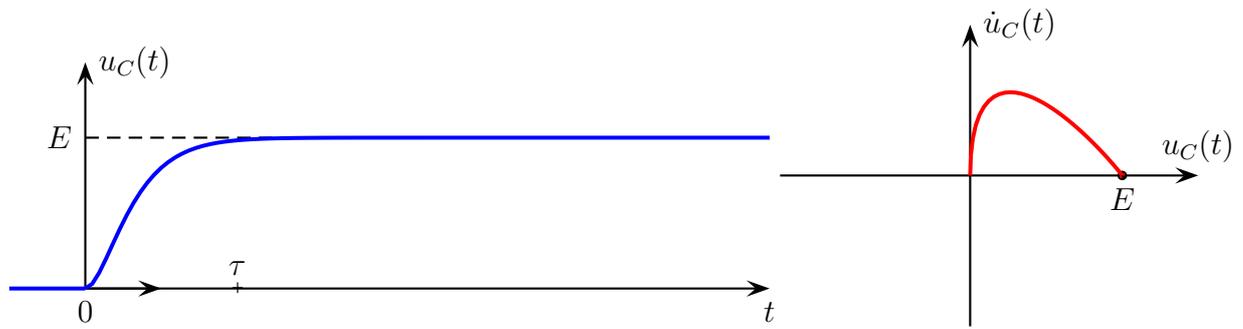


FIGURE 20 – Réponse du circuit RLC série en régime critique ($Q = \frac{1}{2}$)

- si $Q > \frac{1}{2}$ le système est en régime pseudo-périodique et

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)(A \cos \omega t + B \sin \omega t) + E$$

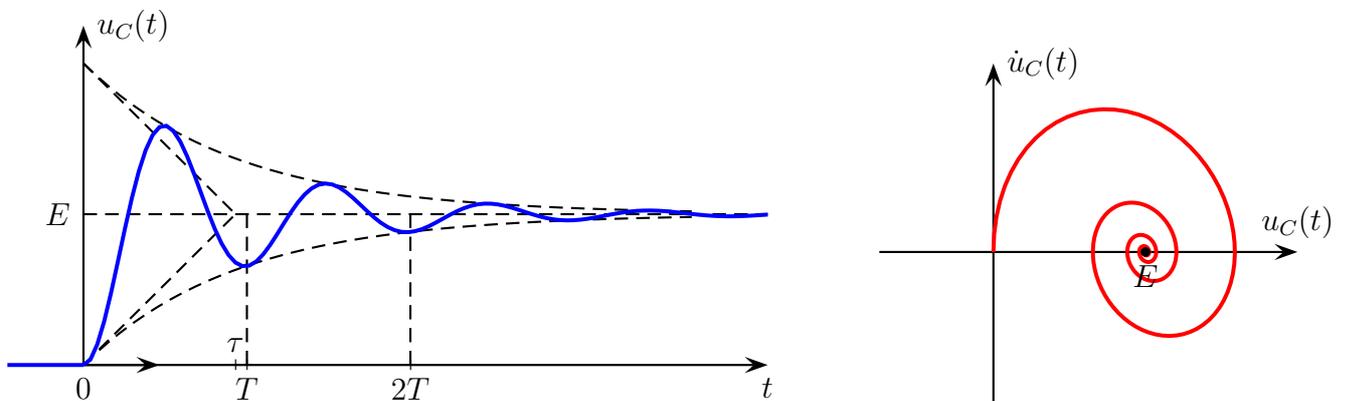


FIGURE 21 – Réponse du circuit RLC série en régime pseudo-périodique ($Q > \frac{1}{2}$)

Remarques :

- Attention, la tangente à l'origine ne coupe pas l'asymptote en $t = \tau$.
- La durée du régime transitoire dépend de Q , elle est minimale lorsque $Q = \frac{1}{2}$, c'est à dire en régime critique.

d. Equivalent mécanique

On peut imaginer un système masse ressort horizontal.

- Initialement sa longueur est $l = l_0$, on pose alors $x = 0$ la position de la seconde extrémité du ressort selon un axe horizontal.
- À l'instant initial, on déplace instantanément l'extrémité A du ressort (de masse nulle) de d d'où $l(0^-) = l_0$ et $l(0^+) = l_0 - d$
- La force de rappel $\vec{F}(t) = -k(l(t) - l_0)\vec{e}_x$ passe alors instantanément de

$$\vec{F}(0^-) = -k(l_0 - l_0)\vec{e}_x = \vec{0} \quad \text{à} \quad \vec{F}(0^+) = -k(l_0 - d - l_0)\vec{e}_x = kd.\vec{e}_x$$

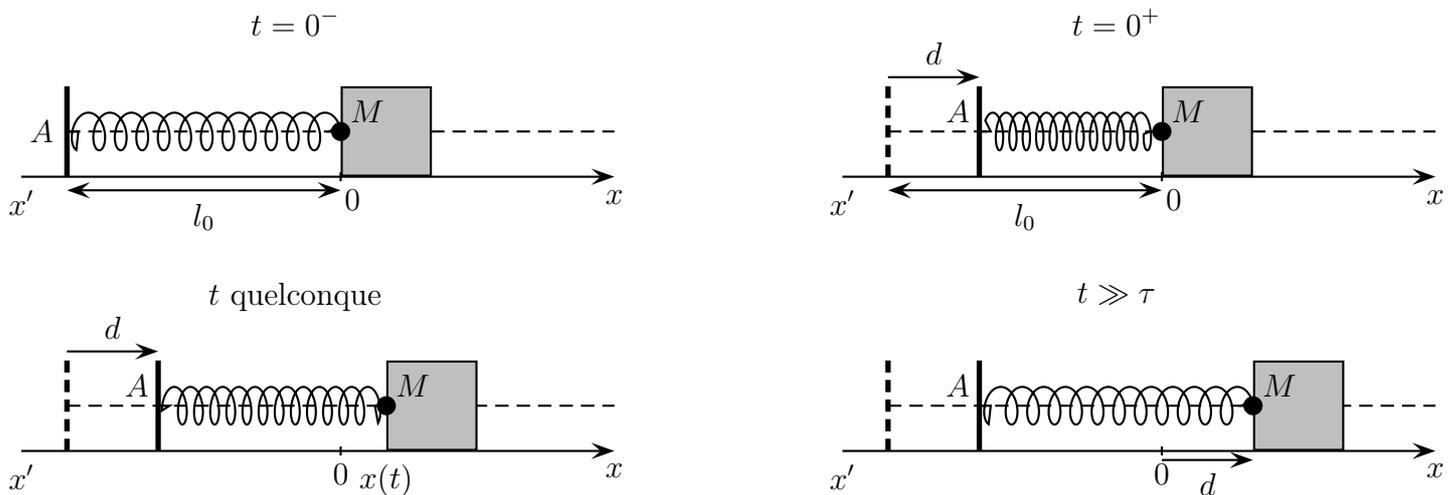
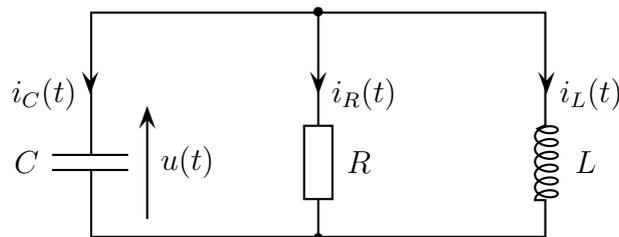


FIGURE 22 – Oscillateur mécanique soumis à un échelon de force.

Après un régime transitoire dont la nature dépendra de la valeurs de Q le facteur de qualité, M s'arrêtera en $x_{\text{éq}} = d$ et on retrouvera des courbes $x(t)$ de la même forme.

6. Cas d'un circuit RLC parallèle

a. Circuit et conditions initiales

FIGURE 23 – Circuit RLC parallèle en régime libre.

avec par exemple $u_C(0^-) = E$: condensateur chargé et un courant nul dans toutes les branches.

b. Équation différentielle en $u_C(t)$

D'après la loi des nœuds,

$$i_C + i_R + i_L = 0$$

avec $i_C(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$, $i_R(t) = \frac{u(t)}{R}$ et $u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow i_L(t) = \frac{1}{L} \int u(t) \cdot dt$ soit

$$C \cdot \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L} \int u(t) \cdot dt = 0 \Rightarrow C \cdot \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{L} = 0$$

ou encore, sous forme canonique,

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{LC} = 0 \iff \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_p} \frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = 0$$

c. Comparaison avec le RLC série

On retrouve la même équation canonique donc le même type de solutions selon la valeur des Q_p et des conditions initiales. On a la même fréquence propre ω_0 mais avec cette fois

$$\frac{\omega_0}{Q_p} = \frac{1}{RC} \Rightarrow Q_p = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}} \Rightarrow Q_{\text{parallèle}} = \frac{1}{Q_{\text{série}}}$$

c'est à dire l'inverse de $Q_{\text{série}}$. Le facteur de qualité augmente quand R augmente.

C'est cohérent car on retrouve bien un circuit LC série quand R tend vers l'infini, c'est à dire en remplaçant le résistor par un interrupteur ouvert.

II Dipôles linéaires en régime sinusoïdal forcé

1. Régime sinusoïdal forcé

Si on alimente un circuit électrique linéaire du deuxième ordre, avec une tension sinusoïdale, par application des lois de Kirchhoff comme précédemment nous aurons une équation du type :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

pour $x(t)$ une grandeur électrique du circuit (intensité dans une branche ou tension aux bornes d'un dipôle). La solution de cette équation différentielle est de la forme $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$.

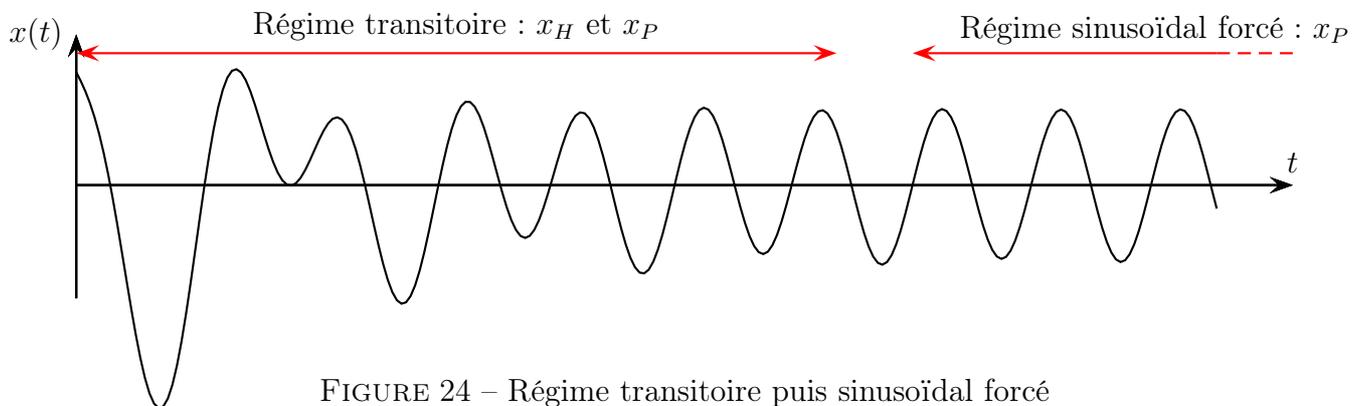


FIGURE 24 – Régime transitoire puis sinusoïdal forcé



ordre2

- $x_H(t)$ est la solution de l'équation différentielle sans second membre. Elle traduit le régime transitoire et disparaît plus ou moins rapidement (rapide si $Q = \frac{1}{2}$).
- $x_P(t)$ est la solution particulière de l'équation différentielle avec second membre. Elle correspond au régime forcé (éviter le mot "permanent" car ici, $x_P(t)$ dépend du temps). De la même forme que le second membre, elle sera ici sinusoïdale et de même pulsation ω c'est à dire de la forme : $x_P(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

Dans cette partie du chapitre on ne s'intéresse qu'au régime forcé :

$$x(t) = x_P(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Il s'agit donc de déterminer uniquement X_m et φ , on n'aura donc **plus besoin de résoudre complètement l'équation différentielle** en tenant compte des conditions initiales (comme si elle avaient été oubliées par le circuit).

2. Représentation d'un signal sinusoïdal

Les lois de l'électrocinétique nous amènent à sommer, dériver ou intégrer deux grandeurs sinusoïdales.

On a déjà utilisé la représentation de Fresnel pour sommer des grandeurs synchrones. L'utilisation des complexes s'avère plus adaptée lorsqu'on travaille avec plus de grandeurs ou si on a à les dériver.

a. Utilisation des complexes

Plutôt que d'utiliser les formules trigonométriques qui vont alourdir les calculs, nous pouvons utiliser la méthode des *complexes* qui contrairement à ce que suggère son nom, va nous *simplifier* les calculs.

Principe : à la grandeur $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, on associe la fonction complexe $\underline{x}(t)$ telle que $\underline{x}(t) = X_m(\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$ avec j tel que $j^2 = -1$.

Définition : \underline{X}_m est l'amplitude complexe

$$\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} = X_m(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$x(t)$ est alors la partie réelle de $\underline{x}(t)$ qui n'a aucune réalité physique, c'est un intermédiaire de calcul.



Lien avec $x(t)$: on retiendra que

$$x(t) = \Re(\underline{x}(t)) \text{ avec } \underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X}_m e^{j\omega t} \text{ où } \underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} \text{ est l'amplitude complexe.}$$

L'amplitude complexe \underline{X}_m contient toutes les caractéristiques de $x(t)$:

- son module

$$|\underline{X}_m| = \sqrt{\Re(\underline{X}_m)^2 + \Im(\underline{X}_m)^2} = X_m$$

est égal à l'amplitude X_m de $x(t)$,

- son argument

$$\arg(\underline{X}_m) = \arctan\left(\frac{\Im(\underline{X}_m)}{\Re(\underline{X}_m)}\right) = \varphi \text{ si } \Re(\underline{X}_m) > 0$$

est égal à φ , la phase à l'origine de $x(t)$.

Rappels mathématiques sur les complexes Soient $\underline{x} = a + bj$ et \underline{x}' deux nombres complexes, α et β des nombres réels.

- Représentation de \underline{x} dans le plan complexe.

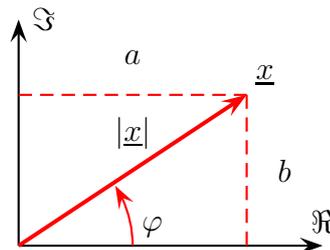


FIGURE 25 – Représentation graphique d'un nombre complexe

- Module de \underline{x} . D'après la figure ci-contre,

$$|\underline{x}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\Re(\underline{x})^2 + \Im(\underline{x})^2}$$

- Argument de \underline{x} : $\arg \underline{x} = \varphi$. De même, sur la figure on relève

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} = \frac{\Im(\underline{x})}{\Re(\underline{x})} \quad \cos \varphi = \frac{a}{|\underline{x}|} = \frac{\Re(\underline{x})}{\sqrt{\Re(\underline{x})^2 + \Im(\underline{x})^2}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{b}{|\underline{x}|} = \frac{\Im(\underline{x})}{\sqrt{\Re(\underline{x})^2 + \Im(\underline{x})^2}}$$

Il faudra utiliser deux formules pour déterminer complètement φ (modulo 2π) car l'utilisation de la première par exemple donne φ à π près.

- ★ Si $a > 0 \Rightarrow \cos \varphi > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \arctan \frac{b}{a}$.
- ★ Si $a < 0 \Rightarrow \cos \varphi < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\pi + \arctan \frac{b}{a}$.

- Formules utiles :

$$|\underline{xx'}| = |\underline{x}||\underline{x'}| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\underline{x}}{\underline{x'}} \right| = \frac{|\underline{x}|}{|\underline{x'}|} \quad |\alpha\underline{x}| = |\alpha||\underline{x}| = \pm\alpha|\underline{x}| \text{ mais } |\alpha\underline{x} + \beta\underline{x'}| \neq |\alpha||\underline{x}| + |\beta||\underline{x'}|$$

$$\arg \underline{xx'} = \arg \underline{x} + \arg \underline{x'} \quad \text{et} \quad \arg \frac{\underline{x}}{\underline{x'}} = \arg \underline{x} - \arg \underline{x'}$$

$$\arg \alpha\underline{x} = \arg \underline{x} \text{ si } \alpha > 0 \text{ et } \arg \alpha\underline{x} = \arg \underline{x} + \pi \text{ si } \alpha < 0 \quad \arg(\underline{x} + \underline{x'}) \neq \arg \underline{x} + \arg \underline{x'}$$

Application directe n°1 : déterminer le module $|\underline{H}|$ et l'argument φ de $\underline{H} = \frac{G_0}{1 + jx}$ avec G_0 et x positives.

$$|\underline{H}| = \frac{|G_0|}{|1 + jx|} = \frac{G_0}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(G_0) - \arg(1 + jx) = 0 - \arctan(x)$$

Calculs sur des grandeurs sinusoïdales à l'aide de complexes

- Combinaison linéaire de grandeurs sinusoïdales : soient les grandeurs sinusoïdales synchrones

$$x_1(t) = X_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad x_2(t) = X_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

dont on cherche à déterminer la combinaison linéaire $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ sous la forme $X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Passage à la notation complexe $\underline{x}_1(t) = X_{1m} e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}$ et $\underline{x}_2(t) = X_{2m} e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}$, on en déduit

$$\underline{x}(t) = \alpha \underline{x}_1(t) + \beta \underline{x}_2(t) = \alpha X_{1m} e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} + \beta X_{2m} e^{j\varphi_2} e^{j\omega t} = (\alpha X_{1m} e^{j\varphi_1} + \beta X_{2m} e^{j\varphi_2}) e^{j\omega t}$$

ce qui représente à nouveau une grandeur sinusoïdale de même pulsation ω et d'amplitude complexe

$$\underline{X}_m = \alpha X_{1m} e^{j\varphi_1} + \beta X_{2m} e^{j\varphi_2} = \alpha \cdot \underline{X}_{1m} + \beta \cdot \underline{X}_{2m}$$

dont on saura calculer l'argument φ et le module X_m puis $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

Attention : à tout instant, $\underline{X}_m = \alpha \cdot \underline{X}_{1m} + \beta \cdot \underline{X}_{2m}$ mais $X_m \neq \alpha \cdot X_{1m} + \beta \cdot X_{2m}$.

- Dérivation / intégration par rapport au temps : soit $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, une grandeur sinusoïdale représentée par la fonction complexe $\underline{x}(t) = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$

$$\frac{dx(t)}{dt} = X_m e^{j\varphi} \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j\omega X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = j\omega \underline{x}(t)$$

Ainsi, une dérivation par rapport au temps revient à multiplier par $j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}}$.

Une dérivation seconde par rapport au temps revient à multiplier par $(j\omega)^2 = -\omega^2$.

Inversement, intégrer revient à diviser par $j\omega$, c'est à dire à multiplier par $\frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$

Comme les équations rencontrées (lois de Kirchhoff et relations constitutives) sont linéaires, les grandeurs restent synchrones et on pourra les simplifier par $e^{j\omega t}$.

On travaillera donc avec des amplitudes complexes à la place d'équations différentielles ou de combinaisons linéaires de sin et de cos pas toujours évidentes à mettre sous la forme $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Application directe n°2 : déterminez la tension aux bornes d'une bobine réelle équivalente à l'association série d'un résistor de résistance $r = 10 \Omega$ et d'une bobine idéale d'inductance $L = 0,1$ H quand elle est parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité d'amplitude $I_m = 0,28$ A et de fréquence $f = 50$ Hz. On prendra la phase à l'origine de $i(t)$ comme origine des phases.

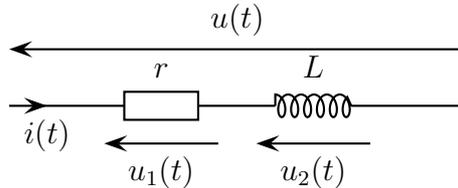


FIGURE 26 – Bobine réelle

Il s'agit de déterminer $u(t)$ sous la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ en prenant $i(t) = I_m \cos \omega t$. Cela revient à calculer U_m et φ .

- Sans utiliser la méthode des complexes, on écrirait

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = RI_m \cos \omega t - LI_m \omega \sin \omega t$$

... pas évident à mettre sous la forme voulue $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$.

- En utilisant la méthode des complexes, on pose $\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + 0)} = I_m e^{j\omega t}$ le complexe associé à $i(t)$ et on cherche $\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{U}_m e^{j\omega t}$ celui associé à $u(t)$.

Comme $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, alors $\underline{u}(t) = \underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t)$ avec

$$\underline{u}_1(t) = r \underline{i}(t) = r I_m e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{u}_2(t) = L \frac{d\underline{i}(t)}{dt} = jL\omega I_m e^{j\omega t}$$

On en déduit $\underline{u}(t) = I_m(r + jL\omega)e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{U}_m = \underline{U}_{1m} + \underline{U}_{2m} = I_m(r + jL\omega)$,

$$U_m = |\underline{U}_m| = I_m \sqrt{r^2 + (L\omega)^2} \quad \varphi = \arg \underline{U}_m = \arctan \frac{L\omega}{r} \quad \text{car } r > 0$$

Et finalement, $u(t) = I_m \sqrt{r^2 + (L\omega)^2} \cos(\omega t + \arctan \frac{L\omega}{r})$.

Application numérique : $\omega = 2\pi f \simeq 314 \text{ rad.s}^{-1}$ d'où $U_m \simeq 9,32$ V et $\varphi = 72,3^\circ = 1,26$ rad soit

$$u(t) = 9,32 \cos(100\pi t + 1,26)$$

b. Variante : diagramme de Fresnel

Principe : chaque grandeur sinusoïdale $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ peut être représentée par un vecteur $\vec{x}(t)$ de norme X_m et faisant un angle $\omega t + \varphi$ avec un axe choisi comme référence des phases : vecteur tournant à la vitesse angulaire $\omega = Cte$ dans le sens direct.

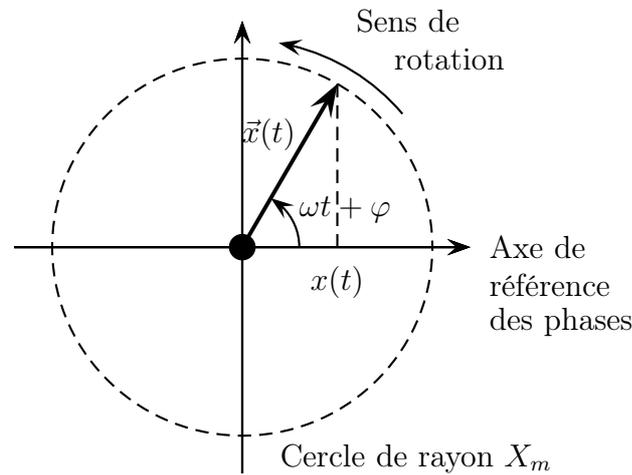


FIGURE 27 – Représentation de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale

$x(t)$ correspond alors à $X_m \cos(\omega t + \varphi)$ la projection du vecteur $\vec{x}(t)$ sur cet axe.

À $t = 0$, on peut noter $\vec{x} = \vec{X}_m$: vecteur de norme X_m et faisant l'angle φ avec l'axe de référence.

Utilisation : à chaque instant, pour des grandeurs synchrones, si $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, on a alors

$$\vec{x}(t) = \alpha \vec{x}_1(t) + \beta \vec{x}_2(t) \text{ et en se plaçant à } t = 0, \vec{X}_m = \alpha \vec{X}_{1m} + \beta \vec{X}_{2m}$$

On construit alors graphiquement \vec{X}_m dont on mesure la norme $X_m = \|\vec{X}_m\|$ et φ la phase à l'origine.

Comme précédemment,

- $\vec{X}_m = \alpha \vec{X}_{1m} + \beta \vec{X}_{2m}$ mais $X_m \neq \alpha X_{1m} + \beta X_{2m}$.
- La dérivation temporelle d'un vecteur \leftrightarrow rotation de $+\frac{\pi}{2}$ et une multiplication de la norme par ω . Inversement, intégration \leftrightarrow rotation de $-\frac{\pi}{2}$ et division par ω .

Application directe n°3 : bobine réelle,

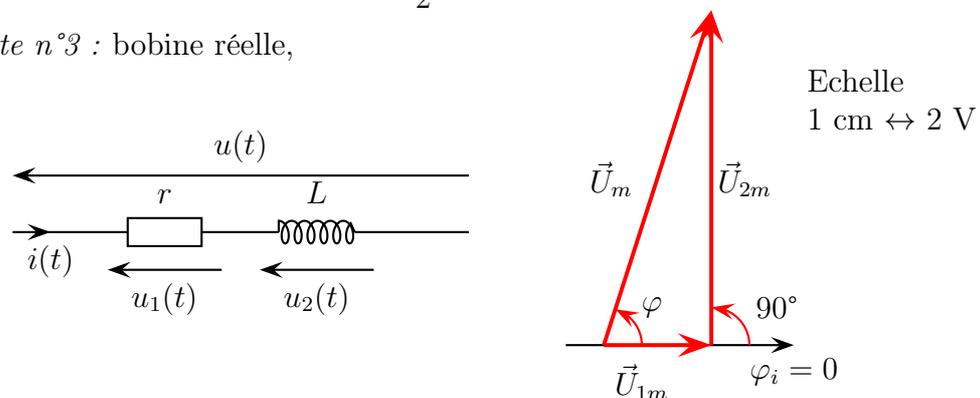


FIGURE 28 – Utilisation de la représentation de Fresnel

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + 0) = I_m \cos(2\pi f t) = 0,28 \cos 100\pi t$$

$u_1 = Ri$ d'où \vec{U}_{1m} selon l'axe de référence ($u_1(t)$ en phase avec $i(t)$) et de norme $U_{1m} = RI_m = 2,83$ V. De même,

$$u_2 = L \frac{di}{dt} = -L\omega I_m \sin(\omega t) = L\omega I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

donc \vec{U}_{2m} est un vecteur de norme $L\omega I_m = 8,88$ V et qui fait un angle $+\frac{\pi}{2}$ avec l'axe de référence.

On utilise ensuite

$$\vec{U}_m = \vec{U}_{1m} + \vec{U}_{2m}$$

On en déduit $U_m = \sqrt{U_{1m}^2 + U_{2m}^2}$ et $\varphi = \arctan \frac{U_{2m}}{U_{1m}}$ Soit graphiquement $U_m \simeq 9,32$ V et $\varphi \simeq 72,3^\circ$.

3. Dipôles linéaires en RSF

a. Loi d'Ohm généralisée

Soit un dipôle passif traversé par $i(t)$ quand on lui applique $u(t)$ en convention récepteur.

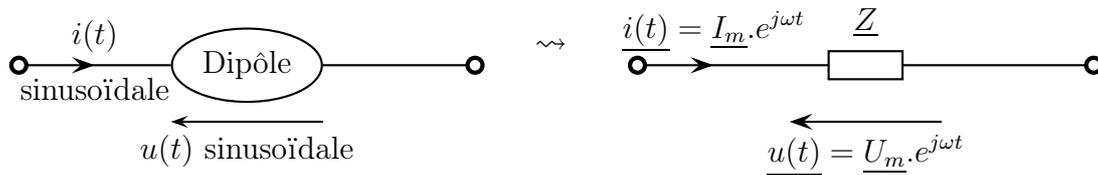


FIGURE 29 – Dipôle linéaire en RSF, cas général

On admet que si le dipôle est linéaire et passif, $u(t)$ et $i(t)$ sont liés par une équation (différentielle) linéaire et on peut alors, après factorisation par $e^{j\omega t}$, écrire $\underline{u}(t) = \underline{Z} \cdot \underline{i}(t)$.

Définition : si \underline{I}_m et \underline{U}_m désignent les amplitudes complexes de $\underline{i}(t)$ et $\underline{u}(t)$, alors l'impédance complexe du dipôle est \underline{Z} telle que :

$$\underline{u}(t) = \underline{Z} \underline{i}(t) \Rightarrow \underline{Z} = \frac{U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{U_m}{I_m} e^{j\varphi} \quad \text{avec } \varphi = \varphi_u - \varphi_i \text{ la phase de } u(t) / i(t)$$

On définit également l'admittance complexe : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$



Loi d'Ohm généralisée :

$$\underline{U}_m = \underline{Z} \cdot \underline{I}_m \iff \underline{I}_m = \underline{Y} \cdot \underline{U}_m$$



Intérêt : la connaissance \underline{Z} permet de déterminer entièrement :

- le rapport

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = |\underline{Z}| = \frac{1}{|\underline{Y}|}$$

$|\underline{Z}|$ en Ohms Ω et $|\underline{Y}|$ en Siemens S.

- la phase de $u(t)$ par rapport à $i(t)$:

$$\varphi = \arg \underline{U}_m - \arg \underline{I}_m = \arg \underline{Z} = -\arg \underline{Y}$$

Remarques :

- On peut écrire $\underline{Z} = R + jX$ avec R la résistance et X la réactance du dipôle (R et X en Ω).

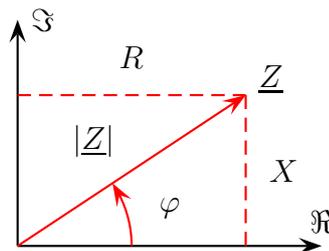


FIGURE 30 – Représentation de \underline{Z} dans le plan complexe, cas inductif

Si le dipôle est passif, R est positif. Si X est positif (c'est à dire $0 \leq \varphi \leq \pi$), le dipôle est dit "inductif" et $u(t)$ est en avance sur $i(t)$ (ce sera le cas pour une bobine, d'où le nom).

Au contraire si X négatif (c'est à dire $-\pi \leq \varphi \leq 0$), le dipôle est dit "capacitif" et $u(t)$ est en retard sur $i(t)$ (ce sera le cas pour un condensateur, d'où le nom).

- On peut écrire $\underline{Y} = G + jB$ avec G la conductance et B la susceptance du dipôle (G et B en Siemens S).

b. Impédance complexe de dipôles passifs

Impédance complexe d'un résistor : d'après la loi d'Ohm en convention récepteur,

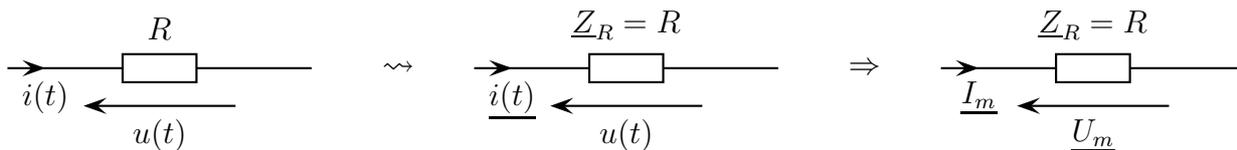


FIGURE 31 – Impédance complexe d'un résistor



$$u(t) = Ri(t) \rightsquigarrow \underline{u(t)} = R\underline{i(t)} \Rightarrow \underline{U_m} = R\underline{I_m} = \underline{Z_R} \underline{I_m} = \underline{Z_R} \underline{i(t)} \text{ avec } \underline{Z_R} = R$$

L'impédance étant réelle positive,

$$\varphi = \arg R = 0$$

il n'y a pas de déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$, on dit qu'ils sont en phase.

Par exemple, en prenant la phase à l'origine de $i(t)$ comme origine des phases.

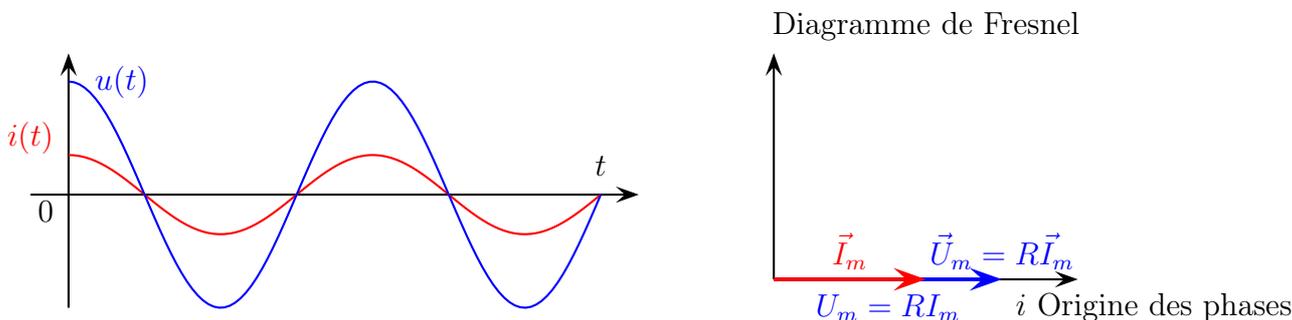


FIGURE 32 – Tension et intensité aux bornes du résistor

Impédance complexe d'une bobine parfaite : si la bobine est parfaite (résistance interne nulle) et en convention récepteur,

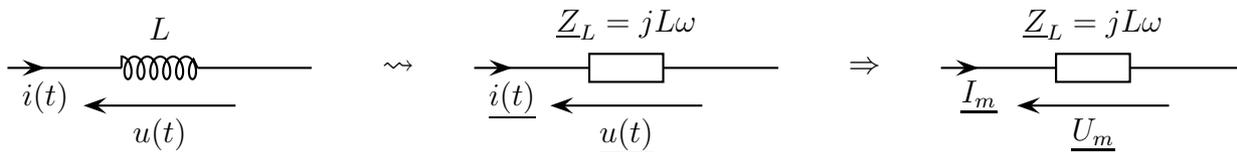


FIGURE 33 – Impédance complexe d'une bobine idéale

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightsquigarrow \underline{u(t)} = L \frac{d\underline{i(t)}}{dt} = jL\omega \underline{i(t)} \underline{U_m} = jL\omega \underline{I_m} = \underline{Z_L} \underline{I_m}$$

avec $\underline{Z_L} = jL\omega = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$



$j = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2}$ et $\underline{Z_L} = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$, il y a donc un déphasage de $+\frac{\pi}{2}$ de $u(t)$ par rapport à $i(t)$, on dit que la tension est en quadrature avance sur le courant (en convention récepteur).



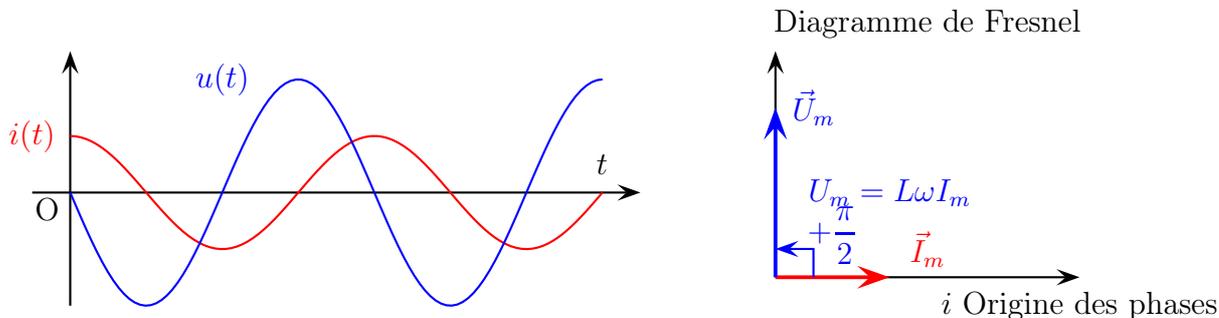


FIGURE 34 – Tension et intensité aux bornes d’une bobine idéale

Remarques :

- Comme $\varphi = \varphi_{u/i} > 0$, le dipôle est inductif.
- Si $\omega \rightarrow 0$, alors $|Z_L| = L\omega \rightarrow 0$: en basses fréquences, la bobine se comporte comme un interrupteur fermé :

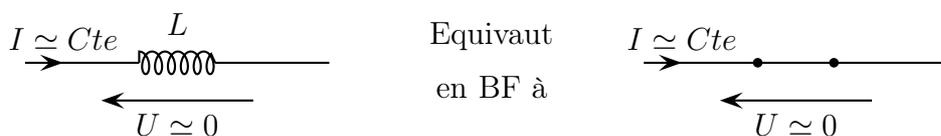


FIGURE 35 – Bobine idéale en basses fréquences et son équivalent

On retrouve le comportement du régime continu ($\omega = 0$).

- Si $\omega \rightarrow \infty$, alors $|Z_L| = L\omega \rightarrow \infty$: en hautes fréquences, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert :

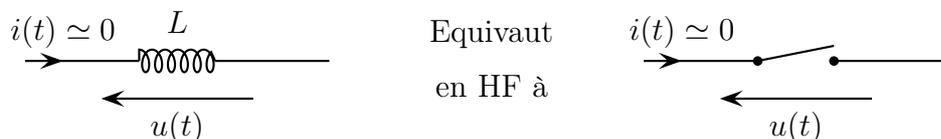


FIGURE 36 – Bobine idéale en hautes fréquences et son équivalent

Impédance complexe d’un condensateur parfait : si le condensateur est parfait (résistance de fuite infinie) et en convention récepteur,

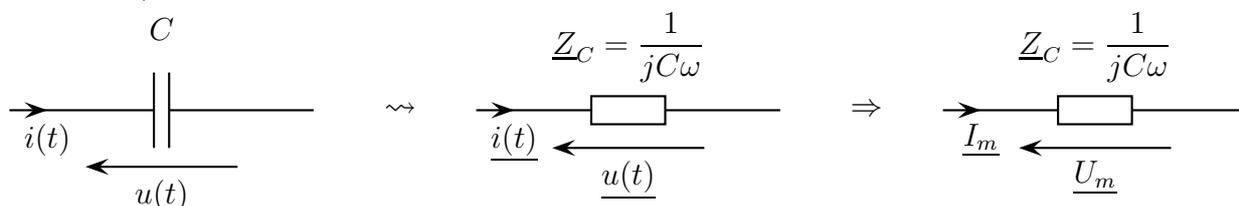


FIGURE 37 – Impédance complexe d’un condensateur idéal

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \rightsquigarrow \underline{i(t)} = jC\omega \underline{u(t)} \Rightarrow \underline{I_m} = jC\omega \underline{U_m} \iff \underline{U_m} = \frac{1}{jC\omega} \underline{I_m} = \underline{Z_C} \underline{I_m}$$

$$\text{avec } \underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{C\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} \iff \underline{Y_C} = jC\omega$$

$\underline{Z_C} = \frac{1}{C\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$, il y a donc un déphasage $-\frac{\pi}{2}$ de $u(t)$ par rapport à $i(t)$, on dit que la tension est en quadrature retard sur le courant (en convention récepteur).

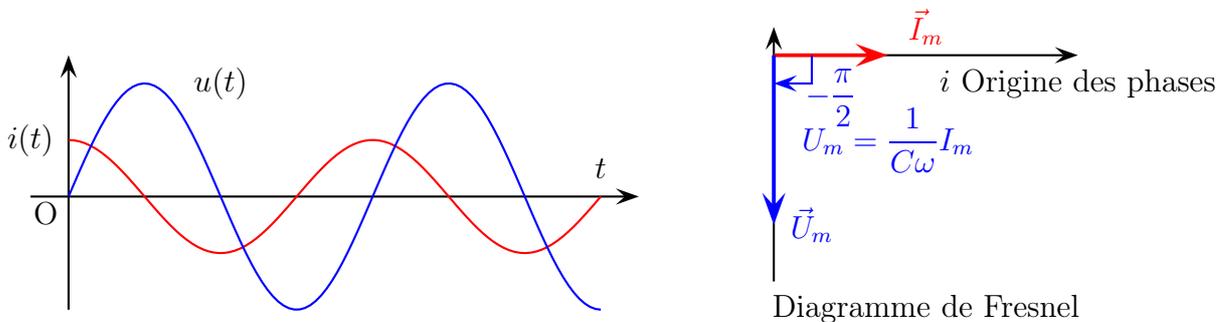


FIGURE 38 – Tension et intensité aux bornes du condensateur idéal

Remarques :

- Comme $\varphi = \varphi_{u/i} < 0$, le dipôle est capacitif.
- Si $\omega \rightarrow 0$, alors $|Z_C| = \frac{1}{C\omega} \rightarrow \infty$: aux basses fréquences, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert :

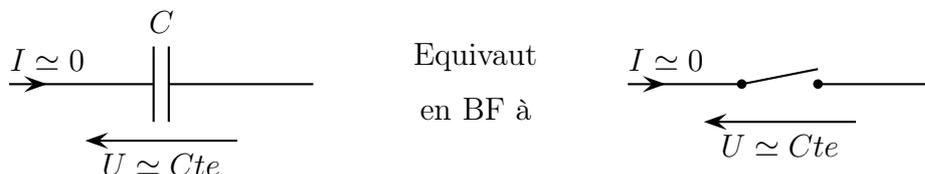


FIGURE 39 – Condensateur idéal en basses fréquences et son équivalent

On retrouve le comportement du régime continu ($\omega = 0$).

- Si $\omega \rightarrow \infty$, alors $|Z_C| = \frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$: en hautes fréquences, le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé :

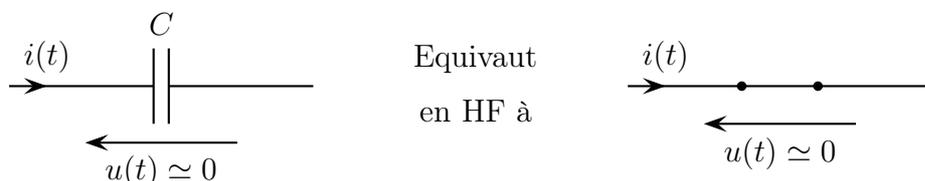


FIGURE 40 – Condensateur idéal en hautes fréquences et son équivalent

c. Dipôles actifs

Une source de tension sinusoïdale est linéaire si il existe une relation linéaire entre la tension à ses bornes $\underline{u}(t)$ et l'intensité du courant $\underline{i}(t)$ qu'elle débite :

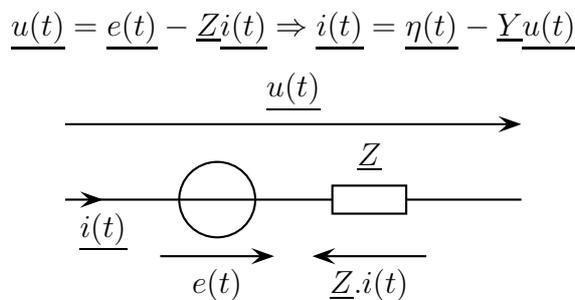


FIGURE 41 – Représentation de Thévenin d'un générateur de tension réel en RSF

Définitions : on peut définir $\underline{e}(t)$ la fém complexe du générateur, \underline{Z} son impédance interne complexe, $\underline{\eta}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{\underline{Z}}$ son cém complexe et $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ son admittance interne complexe.

d. Association de dipôles linéaires

Association série : à tout instant, en passant en notation complexe,

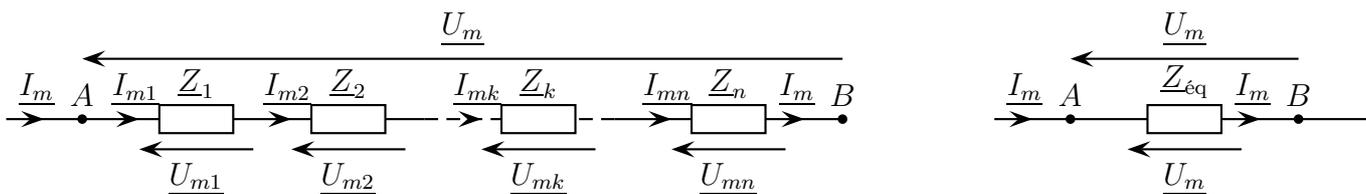


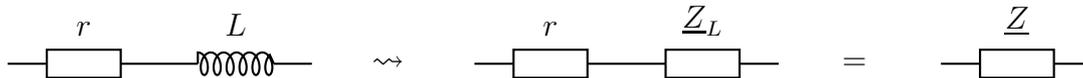
FIGURE 42 – Association d'impédances en série

$\underline{u}(t) = \underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) + \dots + \underline{u}_k(t) + \dots + \underline{u}_n(t)$ soit après division par $e^{j\omega t}$, $\underline{U}_m = \sum_{k=1}^n \underline{U}_{mk}$ avec $\underline{U}_{mk} = \underline{Z}_k \underline{I}_{mk} = \underline{Z}_k \underline{I}_m$ d'où $\underline{U}_m = \underline{Z}_{eq} \cdot \underline{I}_m$ avec



$$\Rightarrow \underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k$$

Application directe n°4 : quelle est l'impédance complexe d'une bobine réelle.



avec $\underline{Z} = r + \underline{Z}_L = r + jL\omega$

Association parallèle : à tout instant, en passant en notation complexe,

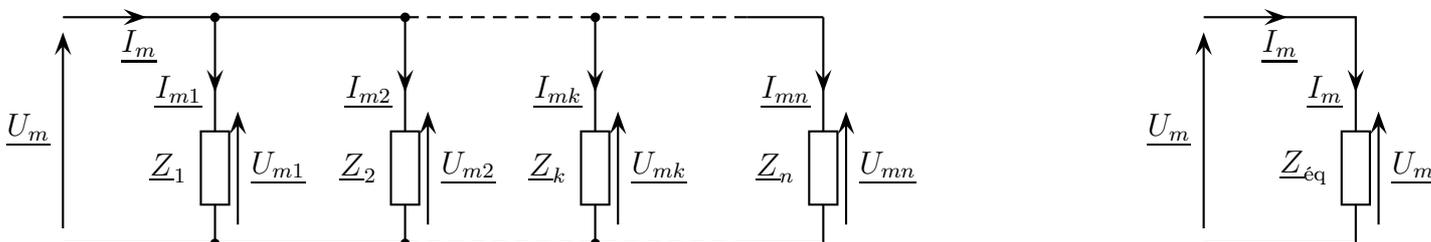


FIGURE 43 – Association d'impédances en parallèle

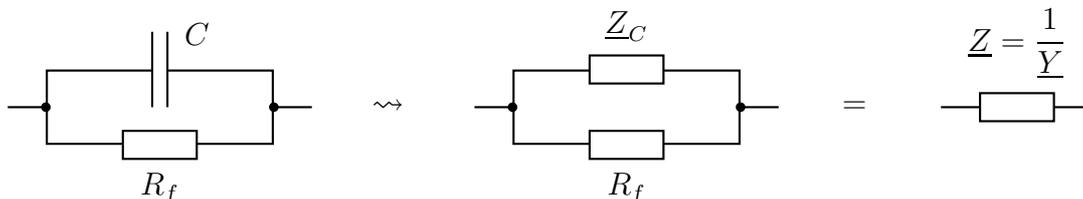
$\underline{i}(t) = \underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \dots + \underline{i}_k(t) + \dots + \underline{i}_n(t)$ avec $\underline{i}_k(t) = \underline{Y}_k \underline{u}_k(t)$ conduit à

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_k}$$



$$\Rightarrow \underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_n = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k$$

Application directe n°5 : quelle est l'admittance complexe d'un condensateur réel.



avec $\underline{Y} = \underline{Y}_{Rf} + \underline{Y}_C = \frac{1}{R_f} + jC\omega$

Conclusion : on retrouve les mêmes lois d'association que celles obtenues en régime permanent avec des résistors en remplaçant R par \underline{Z} et $G = \frac{1}{R}$ par $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$.

Remarque : il en sera de même pour tous les théorèmes de l'électrocinétique.

III Circuits linéaires en RSF, RLC série

1. Lois et Théorèmes de l'électrocinétique en RSF

Application directe n°6 : on travaillera avec des réseaux linéaires de ce type dans lequel les générateurs produisent des tensions sinusoïdales.

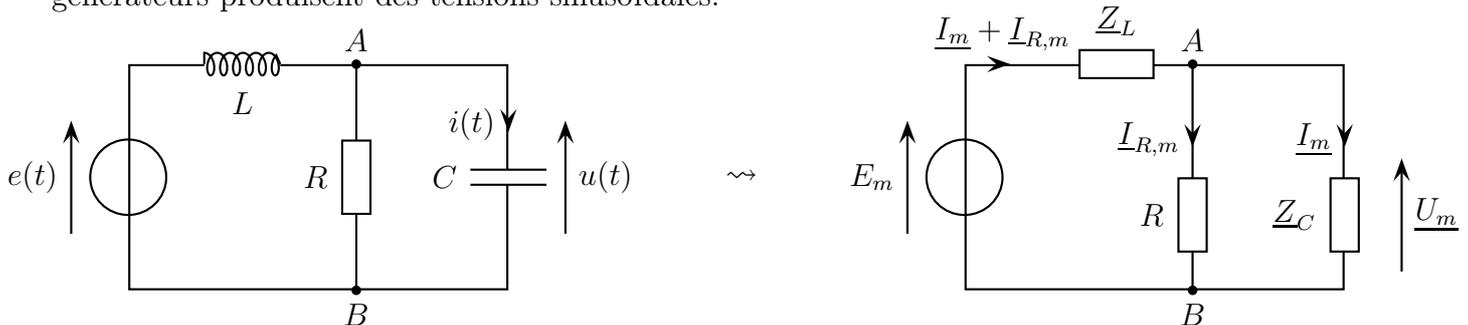


FIGURE 44 – Circuit linéaire et son équivalent en notation complexe

On cherche à déterminer $u(t)$ et $i(t)$ en régime sinusoïdal forcé (RSF).

Si on pose $e(t) = E_m \cdot \cos \omega t$ (la phase à l'origine de $e(t)$ est nulle), on doit alors calculer U_m , φ_u tels que $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ et I_m , φ_i tels que $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$.

a. Lois de Kirchhoff

Loi des nœuds en notation complexe : pour tout nœud N du réseau où arrivent n branches, à chaque instant t , $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k i_k(t) = 0$ avec $\varepsilon_k = +1$ si le courant de la branche k arrive en N et $\varepsilon_k = -1$

s'il part du nœud vers la branche n . Cette loi se traduit en notation complexe par $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \underline{i}_k(t) = 0$ avec $\underline{i}_k(t) = \underline{I}_{mk} e^{j\omega t}$ et par simplification par $e^{j\omega t}$, on obtient,

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \underline{I}_{mk} = 0$$

Loi des mailles en notation complexe : de même, pour toute maille orientée du réseau, à chaque instant t , $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k u_k(t) = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \underline{u}_k(t) = 0$ avec $\underline{u}_k(t) = \underline{U}_{mk} e^{j\omega t}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \underline{U}_{mk} = 0$$

Application directe n°7 : sur le circuit précédent, on "passe en notation complexe", on applique la loi des nœuds (directement sur le circuit) et on écrit autant de lois des mailles que nécessaire et la loi d'Ohm généralisée ($\underline{U}_m = \underline{Z} \cdot \underline{I}_m$) pour obtenir le système d'équations à résoudre.

$$E_m - \underline{Z}_L(\underline{I}_m + \underline{I}_{R,m}) - R \cdot \underline{I}_{R,m} = 0 \quad \text{et} \quad R \cdot \underline{I}_{R,m} - \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_m = 0$$

Avec $\underline{Z}_L = jL\omega$ et $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ connus. On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues ($\underline{I}_{m,L}$ et \underline{I}_m) dont on tire \underline{I}_m . On en déduit finalement

$$\underline{U}_m = \underline{Z}_C \underline{I}_m \Rightarrow U_m = |\underline{U}_m|; \varphi_u = \arg \underline{U}_m; I_m = |\underline{I}_m| \text{ et } \varphi_i = \arg \underline{I}_m$$

Conclusion : si le réseau est linéaire, qu'on travaille en régime sinusoïdal forcé et dans le cadre de l'ARQS (c'est à dire pour des fréquences pas trop élevées), on peut écrire les lois de Kirchhoff en amplitudes complexes \underline{I}_m et \underline{U}_m .

b. Théorèmes de l'électrocinétique

Pour tout réseau linéaire, tous les théorèmes vus en régime continu sont transposables au régime sinusoïdal forcé à condition d'utiliser les notations complexes et les impédances complexes.

Relation des ponts diviseurs en notation complexe :

- Pour un pont diviseur de tension (dipôles traversés par le même courant, figure 42),

$$\underline{U}_{km} = \frac{\underline{Z}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k} \underline{U}_m$$

- Pour un pont diviseur de courant (dipôles soumis à la même tension, figure 43),

$$\underline{I}_{km} = \frac{\underline{Y}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k} \underline{I}_m$$

Application directe n°8 : toujours sur le circuit de départ, après passage en notation complexe, on peut transformer le circuit, c'est d'ailleurs **souvent la première chose à faire**.

On utilise pour cela les lois d'association des dipôles.

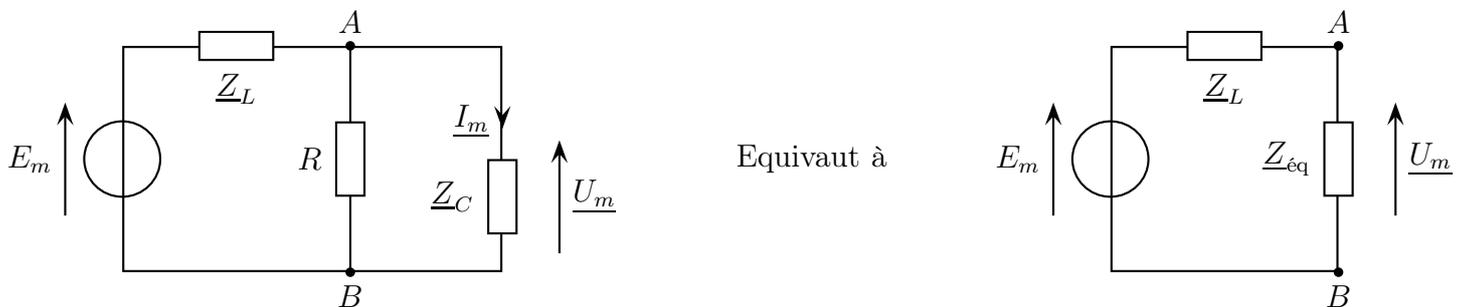


FIGURE 45 – Transformation du circuit pour faire apparaître un pont diviseur de tension

Puis, par utilisation de la formule des diviseurs de tension,

$$\underline{U}_m = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{\underline{Z}_{\text{éq}} + \underline{Z}_L} E_m$$

$$\text{avec } \underline{Z}_L = jL\omega \text{ et } \underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{R \cdot \underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C} = \frac{R}{R \cdot \underline{Y}_C + 1} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Loi de Pouillet en notation complexe : dans le cas d'un circuit à une maille comportant des forces électromotrices (fem), des forces contre électromotrices (fcem) \underline{E}_{km} et des impédances \underline{Z}_k , l'amplitude complexe du courant est

$$\underline{I}_m = \frac{\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \underline{E}_{km}}{\sum_k \underline{Z}_k} \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon_j = +1 \text{ si la f.e.m. } E_k \text{ est orientée comme } I \text{ (fem)} \\ \varepsilon_j = -1 \text{ sinon (fcem)} \end{cases}$$

Loi des nœuds en terme de potentiels en notation complexe : à condition de l'écrire en notation complexe, on peut généraliser aux circuits linéaires la technique valable en régime continu .

Application directe n°9 : toujours sur le circuit précédent, après passage en notation complexe,

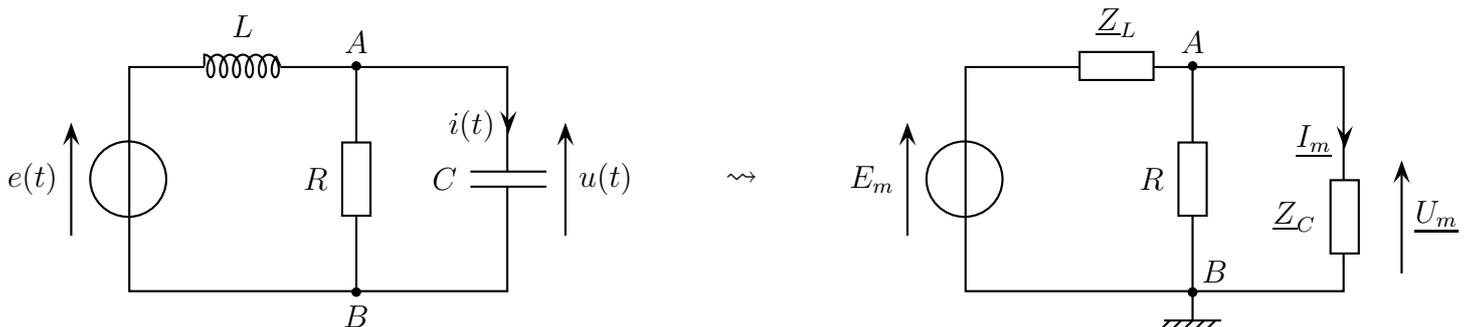


FIGURE 46 – Circuit linéaire et son équivalent en notation complexe et la masse

on pose la masse en B ($\underline{V}_{mB} = 0$) et on applique la loi des nœuds en terme de potentiels (LNTP) en A :

$$\frac{E_m - \underline{V}_{mA}}{R} + \frac{0 - \underline{V}_{mA}}{\underline{Z}_C} + \frac{0 - \underline{V}_{mA}}{\underline{Z}_L} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{V}_{mA} = \frac{\frac{E_m}{R}}{1/R + 1/\underline{Z}_C + 1/\underline{Z}_L} = \frac{\underline{Y}_R E_m}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_C + \underline{Y}_L} = \underline{U}_m = \frac{E_m}{1 + j(RC\omega - \frac{R}{L\omega})}$$

2. Circuit RLC en régime sinusoïdal forcé, résonances.

a. Caractéristiques du circuit

Impédance complexe du circuit : \underline{Z} .

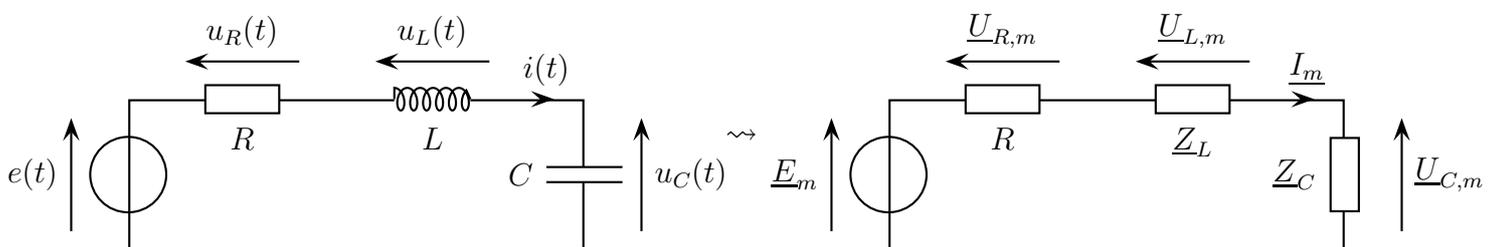


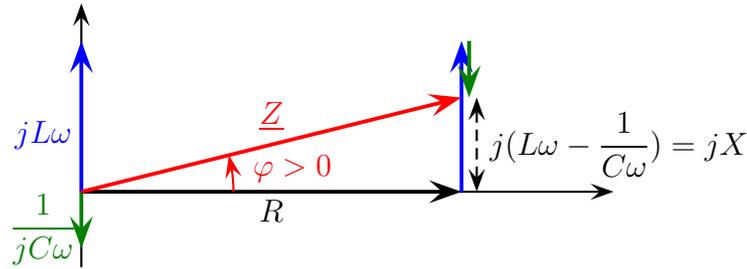
FIGURE 47 – Circuit RLC série et son équivalent complexe

Les composants étant montés en série,

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j \left[L\omega - \frac{1}{C\omega} \right] = \frac{E_m}{\underline{I}_m}$$

On a donc :

- $Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} = \frac{E_m}{I_m}$
- $\varphi = \arg \underline{Z}$ avec $\cos \varphi = \frac{R}{Z} \geq 0$ donc $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \arctan \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \varphi_e - \varphi_i$

FIGURE 48 – Impédance complexe du circuit RLC série, cas inductif ($X > 0$)

Caractère inductif ou capacitif du circuit :

- Pour $\omega = \omega_0$ telle que

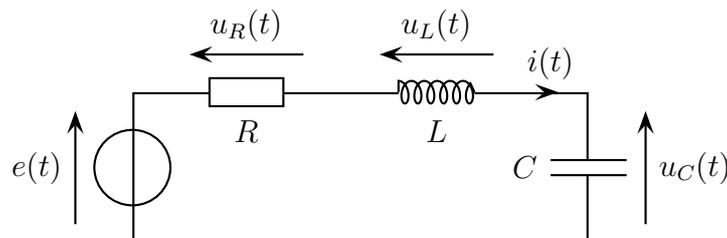
$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

pulsation propre du circuit, $\underline{Z} = R$, l'impédance est purement résistive.

- Si $\omega > \omega_0$, la réactance $X = L\omega - \frac{1}{C\omega} > 0$, $\varphi > 0$, la tension est en avance sur l'intensité et le circuit est inductif.
- Si $\omega < \omega_0$, la réactance $X = L\omega - \frac{1}{C\omega} < 0$, $\varphi < 0$, la tension est en retard sur l'intensité et le circuit est capacitif.

b. Résonance en intensité

Position du problème : le circuit est alimenté par la source $e(t)$ sinusoïdale et on cherche les caractéristiques de $i(t)$, elle même sinusoïdale en régime sinusoïdal forcé.

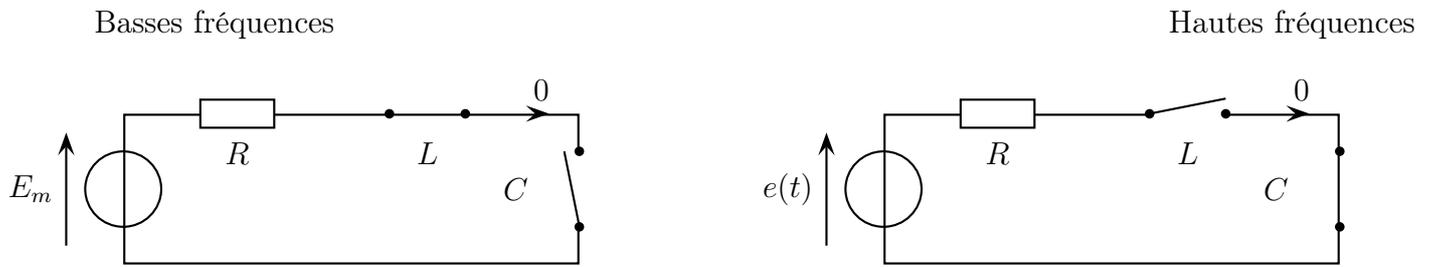
FIGURE 49 – Circuit RLC série en soumis à une tension sinusoïdale

On pose $e(t) = E_m \cos(\omega t + 0) = E_m \cos \omega t$: la phase à l'origine de la source $e(t)$ est la référence des phases.

En régime sinusoïdal forcé, $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$, où I_m et φ_i sont l'amplitude et la phase à l'origine de $i(t)$. Elles dépendent de la pulsation $\omega = 2\pi f$ imposée par la source.

Comportement asymptotique : c'est à dire si ω prend des valeurs extrêmes.

- si $\omega \rightarrow 0$, la bobine se comporte comme un interrupteur fermé ($Z_L = L\omega \rightarrow 0$) et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert ($Z_C = \frac{1}{C\omega} \rightarrow \infty$).
- si $\omega \rightarrow \infty$, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert ($Z_L = L\omega \rightarrow \infty$) et le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé ($Z_C = \frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$).

FIGURE 50 – Comportement asymptotique du circuit RLC série

On remarque que $i(t)$ sera nulle en “basses fréquences” et “hautes fréquences”.

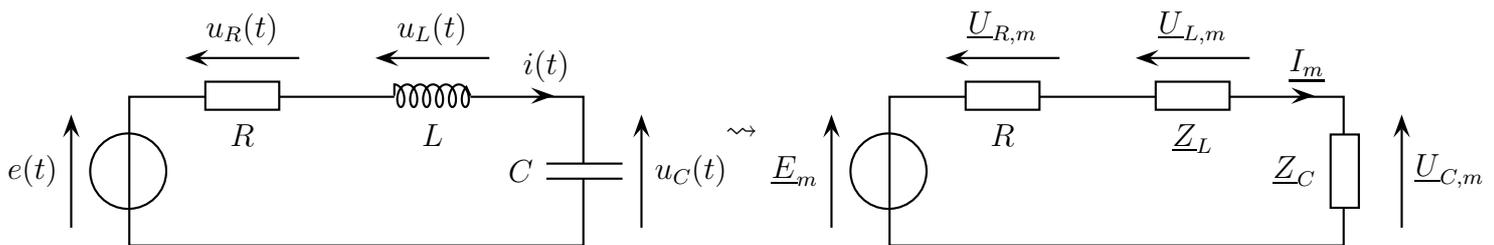
Amplitude complexe de l'intensité du courant : la phase à l'origine de $e(t)$ est la référence des phases d'où

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + 0) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{e(t)} = E_m e^{j(\omega t + 0)} = \underline{E_m} \cdot e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{E_m} = E_m$$

l'amplitude complexe de $\underline{e(t)}$. Pour l'intensité du courant, on a posé

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{i(t)} = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \underline{I_m} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{I_m} = I_m e^{j\varphi_i}$$

Pour déterminer totalement $i(t)$, il reste à déterminer φ_i et I_m , c'est à dire $\underline{I_m}$, fonction de ω .

FIGURE 51 – Circuit RLC série et son équivalent complexe

On applique loi des mailles en terme de courant :

$$E_m - R \cdot \underline{I_m} - \underline{Z}_L \cdot \underline{I_m} - \underline{Z}_C \cdot \underline{I_m} = 0$$

et on obtient directement

$$\underline{I_m} = \frac{E_m}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{E_m}{\underline{Z}} = \frac{E_m}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$

On peut se ramener à une forme canonique en faisant apparaître des grandeurs pertinentes et sans dimension :

- $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité, sans dimension et
- $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite, sans dimension.

$$L = \frac{RQ}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{C} = RQ\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{I_m} = \frac{E_m}{R + j(Q\frac{\omega}{\omega_0} - Q\frac{\omega_0}{\omega})} = \frac{E_m/R}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

Remarque : la loi de de Pouillet en notation complexe nous donnait directement $\underline{I_m}$.

Comportement asymptotique :

$$\underline{I_m} = \frac{E_m/R}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

BF : $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow x \ll 1$

$$x - \frac{1}{x} \simeq -\frac{1}{x}$$

$$\underline{I_m} \simeq \frac{E_m/R}{1 - jQ(\frac{1}{x})} \simeq \frac{E_m/R}{-j\frac{Q}{x}} \simeq j\frac{E_mx}{QR}$$

$$I_m = |\underline{I_m}| \simeq 0 \text{ et } \varphi_i = \arg \underline{I_m} \simeq \frac{\pi}{2}$$

Circuit capacitif

$x = 1 \Rightarrow \omega = \omega_0$

$$x - \frac{1}{x} = 0$$

$$\underline{I_m} = \frac{E_m}{R}$$

$$I_m = \frac{E_m}{R} \text{ et } \varphi_i = 0$$

Circuit résistif

HF : $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow x \gg 1$

$$x - \frac{1}{x} \simeq x$$

$$\underline{I_m} \simeq \frac{E_m/R}{1 + jQx} \simeq \frac{E_m/R}{jQx} = -j\frac{E_m}{QRx}$$

$$I_m \simeq 0 \text{ et } \varphi_i \simeq -\frac{\pi}{2}$$

Circuit inductif

Variation de I_m en fonction de ω : $I_m(\omega)$

$$I_m(\omega) = |\underline{I_m}(j\omega)| = \frac{E_m/R}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$$



resonance-intensite



En travaillant sur la fonction $I_m(\omega)$ précédente et en utilisant les expressions approchées de $\underline{I_m}(j\omega)$ (comportement asymptotique), on a

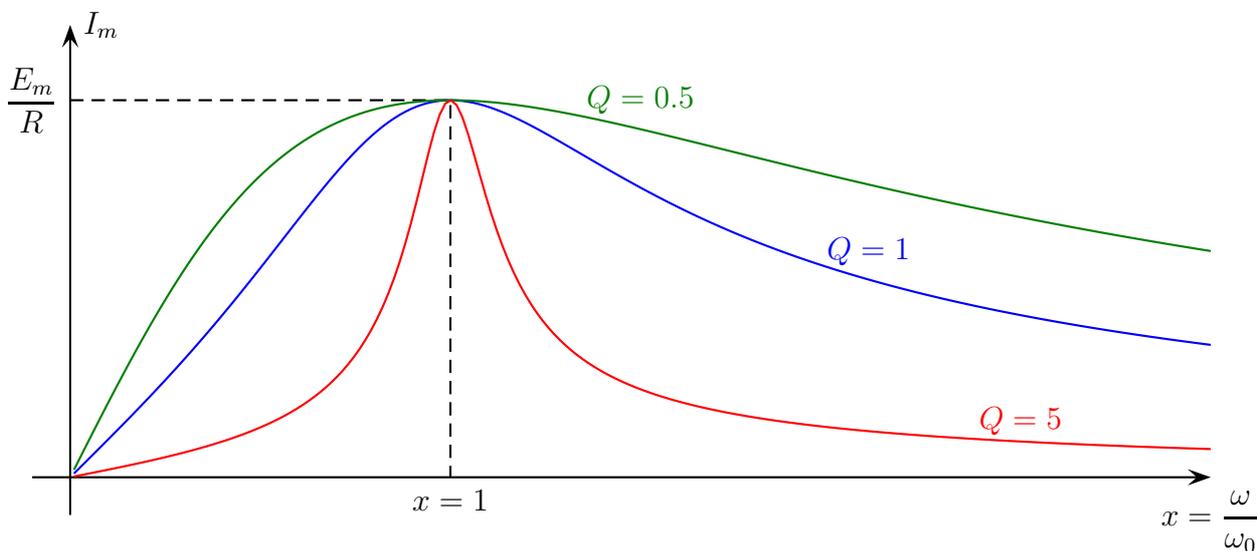


FIGURE 52 – Résonance en intensité dans un circuit RLC série : $I_m(x)$

- On place les points correspondant au comportement asymptotique.
- Pour $x = 1 \iff \omega = \omega_0 \Rightarrow \underline{Z} = R$ on a $I_m = \frac{E_m}{R}$ maximale, on dit qu'il y a résonance en intensité.
- L'acuité de la résonance dépend de la valeur du facteur de qualité Q :
 - ★ résonance aiguë si Q est grand et
 - ★ résonance floue si Q est faible.
- Il y a toujours résonance en intensité dans le circuit RLC série.

Variation de φ_i en fonction de ω : $\varphi_i(\omega)$

$$\varphi_i = \arg(\underline{I}_m) = \arg\left[\frac{E_m}{R} \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}\right] = \arg\left[\frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}\right]$$

$$\varphi_i = \arg(1) - \arg\left[1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] = 0 - \arg\left[1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] \quad \text{soit} \quad \tan \varphi_i = -Q\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

et $\cos \varphi_i$ a le signe de 1 et donc $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_i < \frac{\pi}{2}$ et finalement,

$$\varphi_i = -\arctan Q\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

En travaillant sur la fonction $\varphi_i(\omega)$ précédente et en utilisant les expressions approchées de $\underline{I}_m(j\omega)$ (comportement asymptotique), on a



resonance-intensite

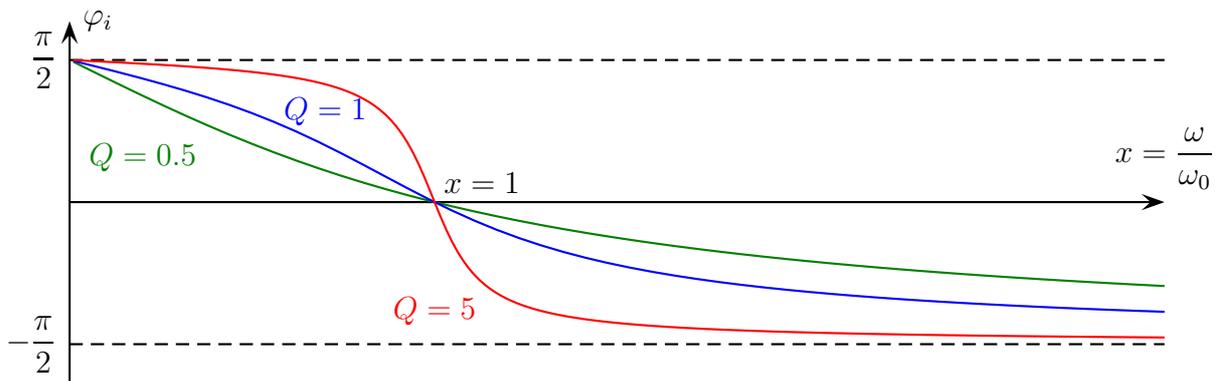
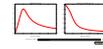


FIGURE 53 – Résonance en intensité dans un circuit RLC série : $\varphi_i(x)$

Lorsque $x = 1$, $\underline{I}_m \simeq \frac{E_m}{R} \Rightarrow \varphi_i = 0$, $e(t)$ et $i(t)$ sont en phase ($\underline{Z} = R$ réelle).



RLC-RSF

C'est ce qui permet, en pratique, de repérer la valeur de $f_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ à l'oscilloscope à l'aide de la méthode de l'ellipse (mode XY)..

c. Résonance en tension aux bornes du condensateur ?

Position du problème et hypothèses : soit $u_C(t)$ la tension aux bornes du condensateur lorsque $e(t) = E_m \cdot \cos(\omega t)$.

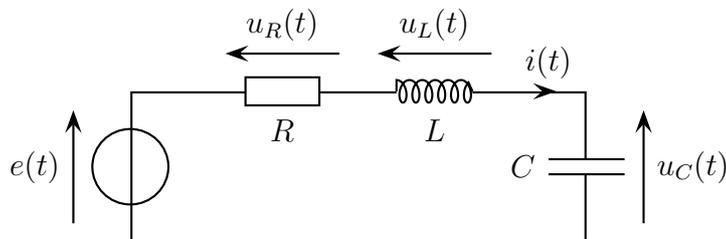


FIGURE 54 – Circuit *RLC* série en régime sinusoïdal forcé

En régime sinusoïdal forcé,

$$u_C(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi_C)$$

où U_{Cm} et φ_C sont l'amplitude et le déphasage de u_C par rapport à $e(t)$ (dont la phase à l'origine est la référence des phases).

On cherche à déterminer les variations des caractéristiques U_{Cm} et φ_C de $u_C(t)$ quand ω varie, on réalise ainsi une étude fréquentielle.

Comportement asymptotique : on trace le circuit équivalent en basses puis en hautes fréquences.

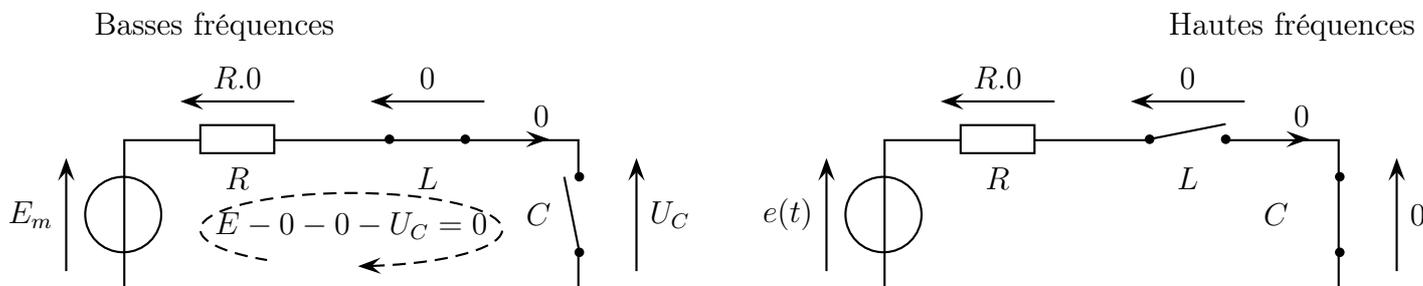


FIGURE 55 – Comportement asymptotique du circuit *RLC* série

On remarque que $u_C(t)$ tend vers $e(t) \simeq E_m$ constant en “basses fréquences” et devient nulle en “hautes fréquences”.

Amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur : après passage en notation complexe,

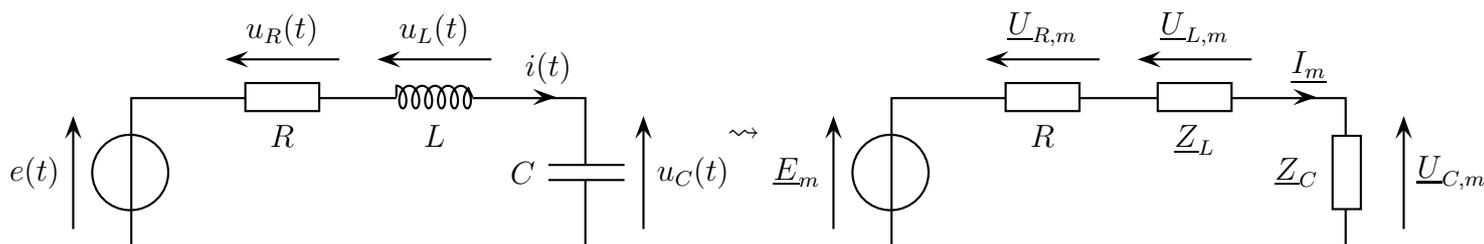


FIGURE 56 – Circuit *RLC* série et son équivalent en notation complexe

la formule des diviseurs de tension donne directement :

$$\underline{U}_{Cm} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} E_m = \frac{E_m}{\underline{Y}_C \underline{Z}_R + \underline{Y}_C \underline{Z}_L + 1} = \frac{E_m}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

et on posant $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$,

$$\underline{U}_{Cm} = \frac{E_m}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$$

Comportement asymptotique :

$$\underline{U_{Cm}} = \frac{E_m}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$$

Basses fréquences : $x \ll 1$

$$1 - x^2 + \frac{jx}{Q} \simeq 1$$

$$\underline{U_{Cm}} \simeq E_m$$

$$\Rightarrow U_{Cm} \simeq E_m \text{ et } \varphi_C \simeq 0$$

 $x = 1 \iff \omega = \omega_0$

$$1 - x^2 + \frac{jx}{Q} = \frac{j}{Q}$$

$$\underline{U_{Cm}} \simeq -jQE_m$$

$$\Rightarrow U_{Cm} = QE_m \text{ et } \varphi_C \simeq -\frac{\pi}{2}$$

Hautes fréquences : $x \gg 1$

$$1 - x^2 + \frac{jx}{Q} \simeq -x^2$$

$$\underline{U_{Cm}} = \frac{E_m}{-x^2}$$

$$\Rightarrow U_{Cm} \simeq 0 \text{ et } \varphi_C \simeq \pm\pi$$

Variation de U_{Cm} en fonction de ω : $U_{Cm}(\omega)$: de $\underline{U_{Cm}}$, en déduit

$$U_{Cm} = |\underline{U_{Cm}}| = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Il y a résonance en tension aux bornes du condensateur si U_{Cm} admet un maximum pour $0 < x < \infty$.

L'expression au numérateur de U_{Cm} étant constante, U_{Cm} est maximale quand son dénominateur est minimum c'est à dire si $(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ admet un minimum.

Il faut donc que la dérivée de cette expression par rapport à x s'annule :

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right] = 0 \Rightarrow -4x(1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 0 \Rightarrow 4x \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right) = 0$$

soit $x = 0$ (tangente à l'origine horizontale), mais aussi $x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$, or, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ étant un réel positif, cette valeur n'est possible que si $1 - \frac{1}{2Q^2} \geq 0$ soit

- Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a pas de résonance en tension aux bornes du condensateur.
- Si $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a une résonance en tension aux bornes de C . À la résonance,

$$\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0 \Rightarrow U_{Cm}(\text{max}) = \frac{QE_m}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$



resonance-tension



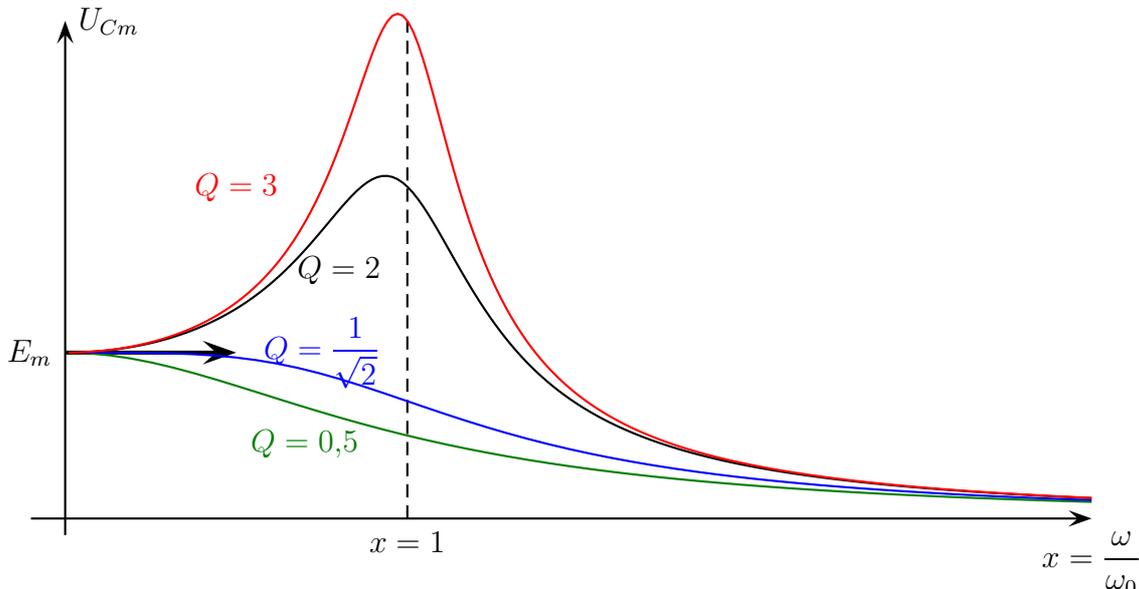


FIGURE 57 – Résonance en tension aux bornes du condensateur, réponse en amplitude

Si Q est grand, $\omega_r \rightarrow \omega_0$ et $U_{Cm}(\max) \simeq QE_m$, Q est appelé facteur de surtension.

Variation de φ_C en fonction de ω : $\varphi_C(\omega)$ Il s'agit de l'argument de $\underline{U}_{Cm} = \frac{E_m}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$ dont la partie réelle change de signe ... on multiplie alors numérateur et dénominateur par $-j$ pour faire apparaître une partie réelle positive au dénominateur (astuce!)

$$\underline{U}_{Cm} = \frac{-jE_m}{-j(1 - x^2) - j^2\frac{x}{Q}} \Rightarrow \varphi_C = -\frac{\pi}{2} - \arg\left[\frac{x}{Q} - j(1 - x^2)\right] \Rightarrow \varphi_C = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left[Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]$$



resonance-tension



On trace son allure pour différentes valeurs de Q et en utilisant les valeurs asymptotique et en $x = 1$.

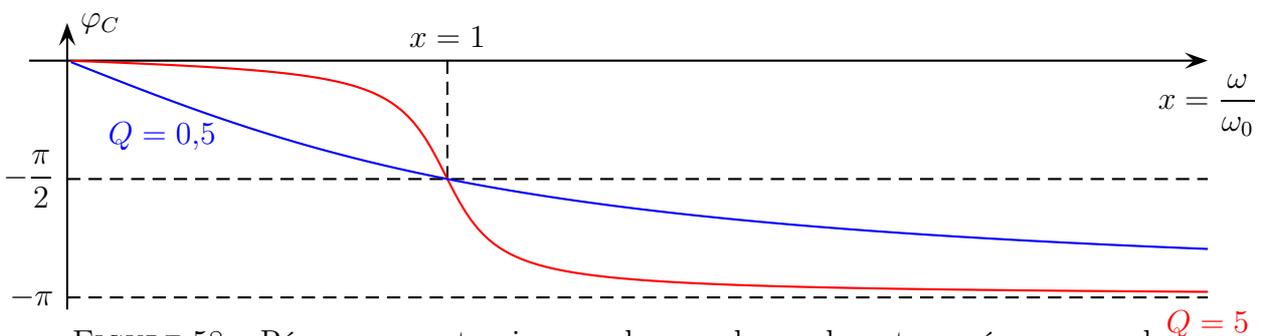


FIGURE 58 – Résonance en tension aux bornes du condensateur, réponse en phase

Remarques :

- φ_C est toujours négatif : la tension $u_C(t)$ est toujours en retard sur $e(t)$.
- On peut donner l'expression de φ_C en utilisant :

$$\underline{U}_{Cm} = \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_m \Rightarrow \varphi_C = \arg(\underline{Z}_C) + \arg(\underline{I}_m) = -\frac{\pi}{2} + \varphi_i : \text{décalage de } -\frac{\pi}{2}.$$

d. Equivalent mécanique

Montage : on reprend l'exemple du ressort horizontal dont une extrémité est reliée à une masse m repérée par le point M d'abscisse $x(t)$.

On agit sur la seconde extrémité du ressort en lui imposant un mouvement sinusoïdal d'amplitude X_0 et de pulsation ω soit $x_A(t) = X_0 \cos(\omega t + 0) = x_0 \cos \omega t$.



ressort-horizontal-et-masse-avec-frottements-fluides-en-RSF

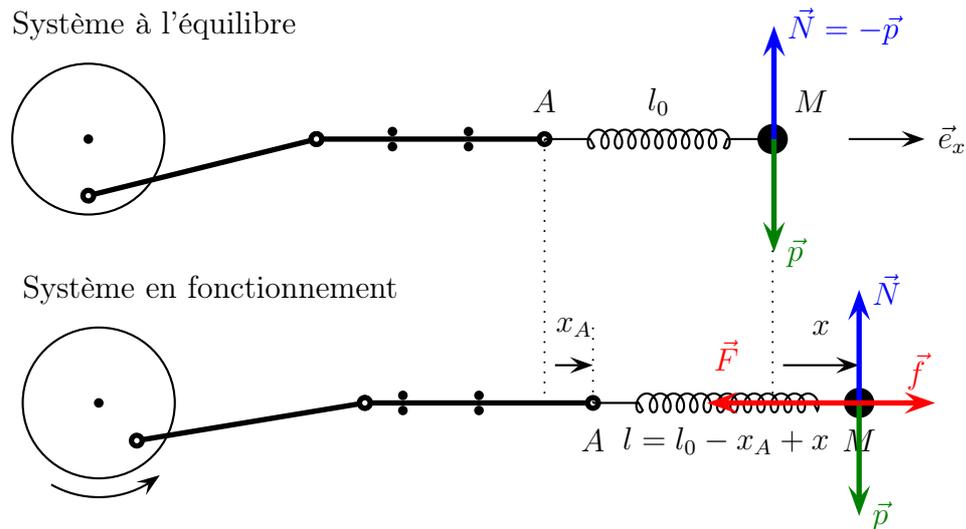


FIGURE 59 – Oscillateur mécanique en régime sinusoïdal forcé

Mise en équation : en choisissant de travailler sur le système mécanique $\{ M \}$ dans le référentiel galiléen lié à l'axe $x'x$.

- Le poids est compensé par la réaction du plan horizontal.
- La longueur du ressort est cette fois

$$l(t) = l_0 - x_A(t) + x(t)$$

d'où une force de rappel élastique

$$\vec{F} = -k(l(t) - l_0) \cdot \vec{e}_x = -k(x(t) - x_A(t)) \cdot \vec{e}_x$$

- On tient compte de la force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \dot{x}(t) \vec{e}_x$

Par projection du principe fondamental de la dynamique sur l'axe $x'x$ on obtient

$$m\ddot{x} = -k(l_0 - x_A + x - l_0) - \alpha\dot{x} \iff \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{kx_A}{m} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0 \cos \omega t$$

en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la pulsation propre de l'oscillateur et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$ avec Q son facteur de qualité.

Réponse en régime sinusoïdal forcé : si on attend suffisamment longtemps, le mobile se déplacera selon un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation ω soit : $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

On se place en RSF de façon à pouvoir utiliser la méthodes des complexes.

$$x(t) \rightsquigarrow \underline{x}(t) = X_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = X_m \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} = \underline{X}_m \cdot e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{X}_m = X_m \cdot e^{j\varphi}$$

\underline{X}_m nous permettra de calculer $X_m = |\underline{X}_m|$ et $\varphi = \arg(\underline{X}_m)$ les grandeurs caractéristiques de $x(t)$.

On exprime facilement

$$\dot{\underline{x}}(t) = j\omega \cdot \underline{x}(t) = j\omega \underline{X}_m \cdot e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \ddot{\underline{x}}(t) = (j\omega)^2 \cdot \underline{x}(t) = -\omega^2 \underline{X}_m \cdot e^{j\omega t}$$

On a par ailleurs

$$x_A(t) = X_0 \cdot \cos(\omega t + 0) \rightsquigarrow \underline{x}_A(t) = X_0 \cdot e^{j(\omega t + 0)} = X_0 \cdot e^{j\omega t}$$

On remplace dans l'équation canonique précédente :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x &= \omega_0^2 X_0 \cos \omega t & \rightsquigarrow & \quad \ddot{\underline{x}} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 X_0 \cdot e^{j\omega t} \\ \Rightarrow -\omega^2 \underline{\ddot{X}}_m \cdot e^{j\omega t} + j\omega \cdot \frac{\omega_0}{Q} \underline{\dot{X}}_m \cdot e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{X}_m \cdot e^{j\omega t} &= \omega_0^2 X_0 \cdot e^{j\omega t} \end{aligned}$$

et après simplification par $e^{j\omega t}$,

$$-\omega^2 \underline{\ddot{X}}_m + j\omega \cdot \frac{\omega_0}{Q} \underline{\dot{X}}_m + \omega_0^2 \underline{X}_m = \omega_0^2 X_0 \Rightarrow \underline{X}_m = \frac{\omega_0^2 X_0}{-\omega^2 + \omega_0^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} = \frac{X_0}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}}$$

en posant $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite.

Analogie : on retrouve un comportement analogue à celui de la tension aux bornes du condensateur (ou sa charge $q(t)$, à C près) : résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ par exemple.

De la même façon la vitesse $v(t) = \dot{x}(t)$ et analogue à l'intensité du courant $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$. On peut par exemple retrouver $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$ en utilisant simplement

$$\underline{v}(t) = \underline{V}_m \cdot e^{j\omega t} = \dot{\underline{x}}(t) = j\omega \underline{X}_m \cdot e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{V}_m = j\omega \underline{X}_m = \frac{\frac{X_0}{\alpha}}{1 + jQ \left(u - \frac{1}{u} \right)}$$



ressort-vertical-rsf

Application directe n°10 : on étudie un oscillateur mécanique vertical et pour lequel on a relevé les graphes suivants. Évaluez sa pulsation propre ω_0 et son facteur de qualité.

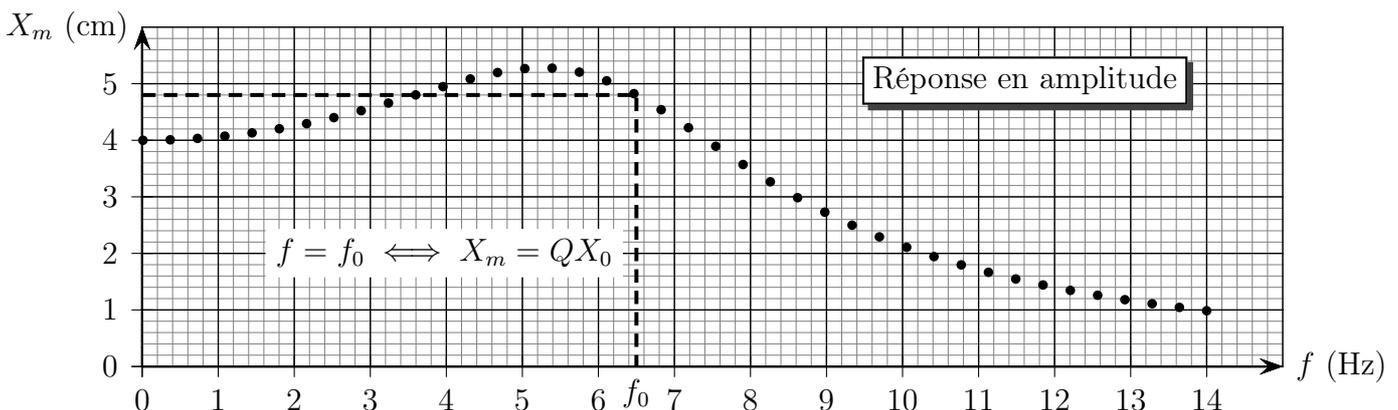


FIGURE 60 – Réponse en amplitude de l'oscillateur en RSF

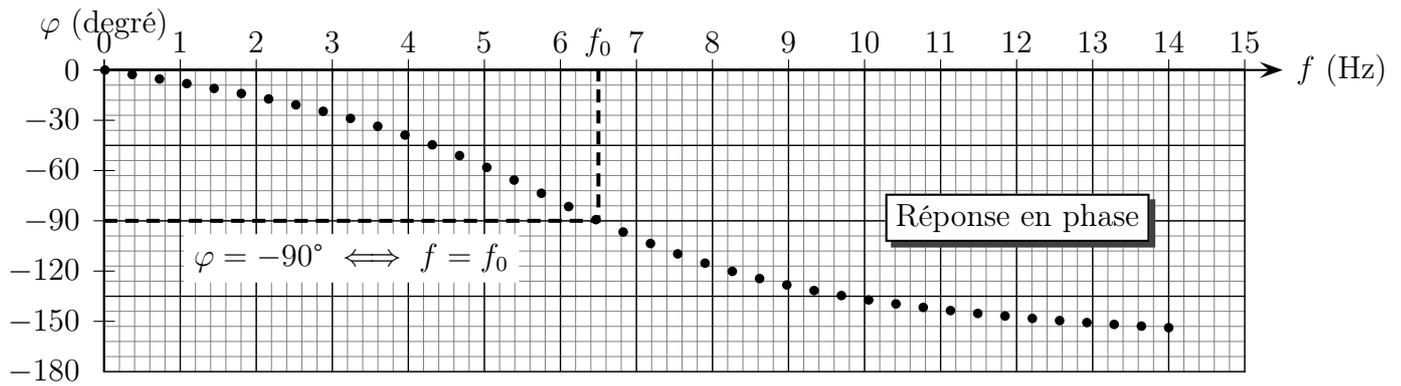


FIGURE 61 – Réponse en phase de l'oscillateur en RSF

D'après l'expression de l'amplitude complexe calculée plus haut

$$\underline{X}_m = \frac{X_0}{1 - u^2 + \frac{ju}{Q}}$$

avec $X_0 = X_m(0)$ l'amplitude en basse fréquence et $u = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$.

On a donc $\varphi = \arg(\underline{X}_m) = -90^\circ$ et $X_m = QX_0$ lorsque $u = 1 \iff f = f_0$ on en déduit successivement $f \simeq 6,5 \text{ Hz} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 \simeq 41 \text{ rad.s}^{-1}$ puis $Q \simeq \frac{4,8}{4} = 1,2$

Notions et capacités exigibles (programme officiel) :

- Circuit RLC série et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.
 - Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique (TP).
 - Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques (TP).
 - Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.
 - Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.
 - Prévoir l'évolution du système en utilisant un portrait de phase fourni.
 - Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
 - Connaître la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.
 - Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.
 - Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, selon la valeur du facteur de qualité.
- Régime sinusoïdal forcé, impédances complexes.
 - Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime harmonique.
- Association de deux impédances.
 - Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
- Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.
 - Mettre en œuvre un dispositif expérimental autour du phénomène de résonance (TP)
 - Utiliser la construction de Fresnel et la méthode des complexes pour étudier le régime forcé.
 - À l'aide d'un outil de résolution numérique, mettre en évidence le rôle du facteur de qualité pour l'étude de la résonance en élongation.
 - Relier l'acuité d'une résonance forte au facteur de qualité.
 - Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.
 - Expliquer la complémentarité des informations présentes sur les graphes d'amplitude et de phase, en particulier dans le cas de résonance d'élongation de facteur de qualité modéré.
 - Mettre en œuvre une démarche expérimentale autour des régimes transitoires du premier ou du second ordre (flash, sismomètre ...) (TP).

Table des matières

I Oscillateurs amortis en régime transitoire

1. Oscillateur mécanique amorti par frottements fluides
 - a. Dispositif et conditions initiales
 - b. Comportement du système
 - c. Approche énergétique
 - d. Mise en équation
2. Comparaison avec un circuit *RLC* série en régime libre
 - a. Circuit et conditions initiales
 - b. Réponse du circuit
 - c. Approche énergétique
 - d. Mise en équation
3. Equation canonique, analogie
 - a. Similitudes
 - b. Equation canonique
 - c. Identification pour chaque système
 - d. Analogie électro-mécanique
4. Résolution de l'équation différentielle en régime libre, *sol_H*
 - a. Régime apériodique
 - b. Régime critique
 - c. Régime pseudo-périodique
 - d. Cas idéal du régime harmonique $Q \rightarrow \infty \Rightarrow \tau \rightarrow \infty \Rightarrow \xi \rightarrow 0$
 - e. Comparaison des différents régimes
5. Réponse à un échelon
 - a. Circuit et conditions initiales
 - b. Equation différentielle en $u_C(t)$, forme canonique.
 - c. Résolution de l'équation différentielle : charge du condensateur
 - d. Equivalent mécanique
6. Cas d'un circuit *RLC* parallèle
 - a. Circuit et conditions initiales
 - b. Équation différentielle en $u_C(t)$
 - c. Comparaison avec le *RLC* série

II Dipôles linéaires en régime sinusoïdal forcé

1. Régime sinusoïdal forcé
2. Représentation d'un signal sinusoïdal
 - a. Utilisation des complexes
 - b. Variante : diagramme de Fresnel
3. Dipôles linéaires en RSF
 - a. Loi d'Ohm généralisée
 - b. Impédance complexe de dipôles passifs
 - c. Dipôles actifs
 - d. Association de dipôles linéaires

III Circuits linéaires en RSF, *RLC* série

1. Lois et Théorèmes de l'électrocinétique en RSF
 - a. Lois de Kirchhoff
 - b. Théorèmes de l'électrocinétique
2. Circuit *RLC* en régime sinusoïdal forcé, résonances.
 - a. Caractéristiques du circuit
 - b. Résonance en intensité
 - c. Résonance en tension aux bornes du condensateur ?
 - d. Equivalent mécanique

Les savoirs :

- ♡ Formes canoniques de l'équation différentielle d'un système du second ordre amortis par frottement fluide, signification physique et unité de ω_0 , Q , $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et ξ .
- ♡ Forme des solutions de l'équation différentielle homogène (régime libre) en fonction de la valeur de Q (à comparer à $\frac{1}{2}$). Allure de l'évolution temporelle et du portrait de phase. Réponse d'un oscillateur amortis par frottement fluide à un échelon.
- ♡ Forme du complexe associé $\underline{x}(t)$ à une grandeur sinusoïdale $x(t)$, notion d'amplitude complexe \underline{X}_m en régime sinusoïdal forcé.
- ♡ Impédance complexe d'un résistor, d'un condensateur, d'une bobine, représentation Thévenin d'une source. Comportement BF et HF. Association série ou parallèle d'impédances.
- ♡ Allure de la courbe de résonance en intensité dans un circuit *RLC* série en fonction du facteur de qualité.
- ♡ Résonance en tension (ou pas) aux bornes du condensateur dans un circuit *RLC* série selon la valeur du facteur de qualité (à comparer à $\frac{1}{\sqrt{2}}$).
- ♡ Connaître les lois et théorèmes de l'électrocinétique en RSF : lois de Kirchhoff, ponts diviseurs ...

Les savoir-faire :

- ✓ Etablir l'équation différentielle d'un système électrique ou mécanique du second ordre en régime transitoire. Identifier à la forme canonique. En déduire la forme de la solution en fonction selon la valeur de Q , résoudre à l'aide des conditions initiales et tracer la réponse temporelle. Vérifier la cohérence en régime permanent.
- ✓ Etablir l'expression de l'amplitude complexe d'une grandeur sinusoïdale pour un système linéaire du second ordre en régime sinusoïdal forcé. En déduire l'amplitude et la phase à l'origine de cette grandeur et tracer la réponse fréquentielle. Vérifier la cohérence en BF et HF.
- ✓ Savoir utiliser les lois et théorèmes de l'électrocinétique en RSF à l'aide de la notion d'impédance complexe et d'amplitude complexe.
- ✓ Savoir tracer et exploiter une courbe de réponse fréquentielle d'un oscillateur amortis.