

M_{05} Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

PCSI₂ 2013 – 2014

Introduction : *Le bloc 5 est motivé par ses nombreuses applications. On se limite à discuter la nature de la trajectoire sur un graphe donnant l'énergie potentielle effective et on ne poursuit l'étude dans le cas d'un champ newtonien (lois de Kepler) que dans le cas d'une trajectoire circulaire. Le caractère elliptique des trajectoires associées à un état lié est affirmé sans qu'aucune étude géométrique des ellipses ne soit prévue ; on utilise dans ce cas les constantes du mouvement (moment cinétique et énergie mécanique) pour exprimer l'énergie de la trajectoire elliptique en fonction du demi-grand axe. Enfin l'approche de l'expérience de Rutherford est exclusivement documentaire : tout calcul de la déviation est exclu, il s'agit en revanche d'utiliser le graphe de l'énergie potentielle effective pour relier la distance minimale d'approche à l'énergie mise en jeu.*

Notions et contenu :

- Point matériel soumis à un seul champ de force centrale.
- Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.
- Champ newtonien. Lois de Kepler.
- Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.
- Satellite géostationnaire.
- Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire puis dans le cas du mouvement elliptique.
- Vitesses cosmiques : vitesse en orbite basse et vitesse de libération.

I Force centrales conservatives, généralités

Soit un système ramené à un point matériel M soumis à une force \vec{F} . On étudie son mouvement dans un référentiel \mathcal{R}_g galiléen.

1. Définition et exemples

a. Définitions

- La force appliquée à M est centrale si il existe un point O fixe de \mathcal{R}_g tel que \vec{F} est toujours colinéaire à \overrightarrow{OM} lors du mouvement de M .
- La force \vec{F} est conservative si elle dérive d'une énergie potentielle notée $E_p(r)$, fonction de $r = OM$.

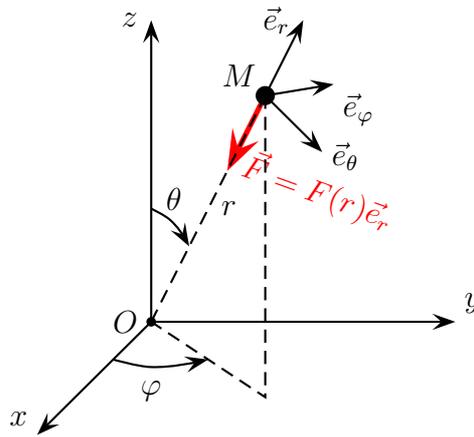


FIGURE 1 – Force centrale

On peut alors l'écrire sous la forme :

$$\vec{F} = F(r) \cdot \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad \vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r} \quad \text{et} \quad F(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr}$$

\vec{e}_r est le vecteur radial du système de coordonnées sphériques et $F(r)$ la composante radiale de \vec{F}

Remarque : la force est

- attractive si $F_r < 0 \iff \frac{dE_p}{dr} > 0$, c'est à dire $E_p(r)$ croissante.
- répulsive si $F_r > 0 \iff \frac{dE_p}{dr} < 0$, c'est à dire $E_p(r)$ décroissante.

b. Oscillateur harmonique plan

Un point matériel soumis uniquement à la force de rappel d'un ressort $\vec{F} = -k(r - l_0) \cdot \vec{e}_r$ est soumis à une force centrale qui dérive de $E_{p,ela} = \frac{1}{2}k(r - l_0)^2$.

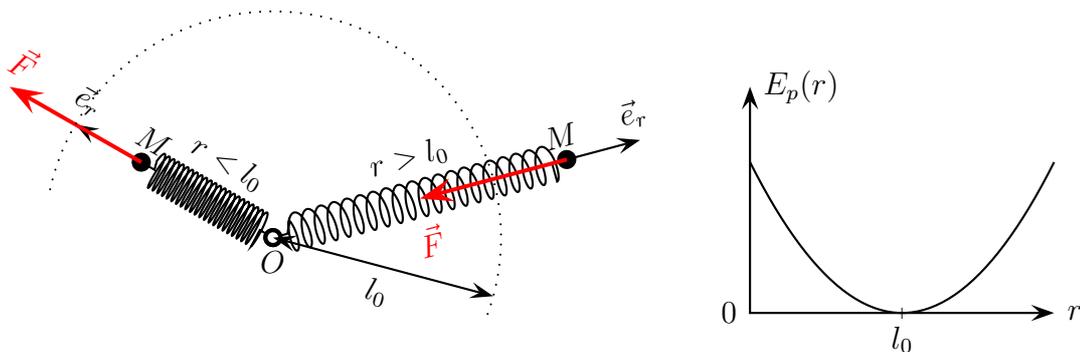


FIGURE 2 – Oscillateur harmonique plan

Remarques :

- Cette force est tantôt attractive ($r > l_0$), tantôt répulsive ($r < l_0$).
- $r = OM$ est forcément positive.

2. Lois générales de conservation

Le mouvement de M soumis à \vec{F} centrale et conservative est à priori à 3 degrés de liberté (x, y, z) ou (r, θ, φ) . On va montrer qu'on peut se ramener à deux degrés de liberté puis effectuer des discussions graphiques comme pour un mouvement à un seul degré de liberté.

a. Conservation du moment cinétique et conséquences

Démonstration : O est fixe dans \mathcal{R}_g galiléen, on peut donc appliquer le théorème du moment cinétique à M

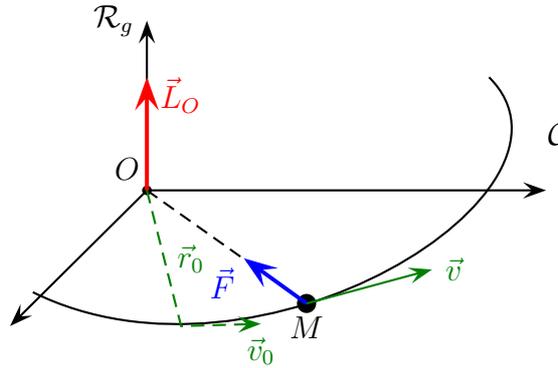


FIGURE 3 – Moment cinétique d'un point soumis à une force centrale

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \vec{L}_O \text{ reste constant lors du mouvement}$$

En posant $\vec{C} = \vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0$, la constante des aires où \vec{r}_0 et \vec{v}_0 sont respectivement la position et la vitesse initiale de M , on peut écrire la conservation de \vec{L}_O sous la forme

$$\vec{L}_O = m \cdot \vec{C} \quad \text{constant au cours du mouvement}$$

Planéité : comme $\vec{L}_O = m \cdot \vec{C}$ garde une direction fixe, celle de $\vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0$, le plan (\vec{OM}, \vec{v}) reste orthogonal à cette direction fixe et le mouvement est plan.

Respect de la loi des aires : le mouvement étant plan, on peut utiliser le système de coordonnées polaires

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{r} = r\vec{e}_r \quad \Rightarrow \vec{r} \wedge \vec{v} = r^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

$$\vec{C} = \frac{\vec{L}_O}{m} = r^2\dot{\theta}\vec{e}_z = C\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad C = r^2\dot{\theta} = Cte = r_0v_0 \sin(\vec{r}_0, \vec{v}_0)$$

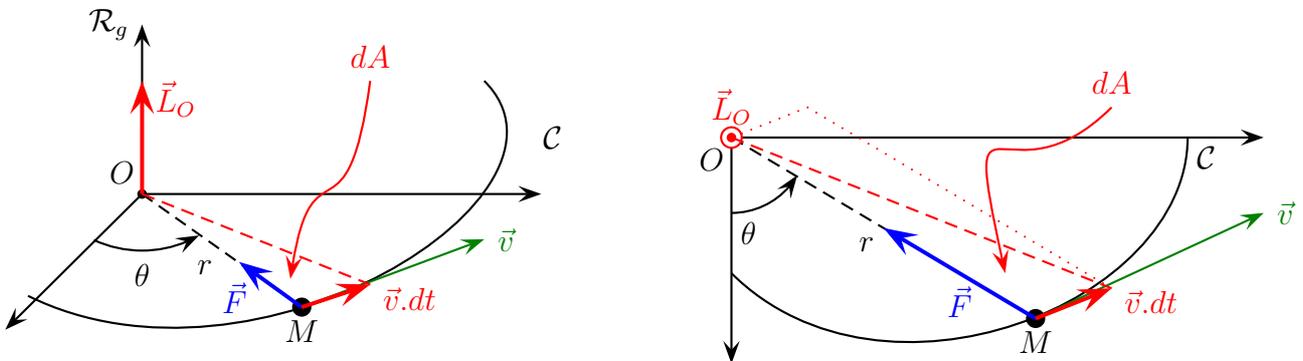


FIGURE 4 – Aire dA balayée pendant dt

Soit dA la surface balayée par le rayon vecteur \overrightarrow{OM} pendant le temps dt .

C'est la moitié de l'aire du parallélogramme construit à partir des vecteurs \overrightarrow{OM} et $d\overrightarrow{OM} = \vec{v}dt$

$$dA = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}dt\| \quad \Rightarrow \quad \text{Vitesse aréolaire} \quad \frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}_O|}{2m} = \frac{C}{2} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} \text{ constante}$$

Loi des aires : l'aire balayée par le rayon vecteur est proportionnelle au temps mis pour la balayer : $A = \frac{C}{2}t$ est l'aire balayée depuis $t = 0$.

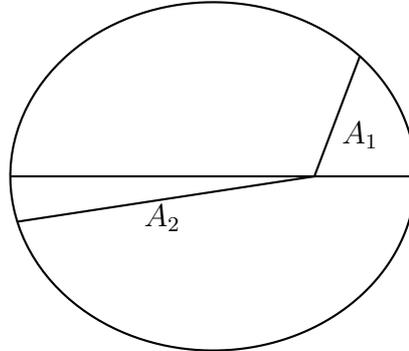


FIGURE 5 – Loi des aires : les aires A_1 et A_2 sont identiques si balayées pendant la même durée

Conclusion : on retiendra que la conservation du moment cinétique $\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}.\vec{e}_z$ implique la planéité du mouvement et la loi des aires,

$$r^2\dot{\theta} = 2\frac{dA}{dt} = C$$

Remarque : dans le cas particulier où $\sin(\vec{r}_0, \vec{v}_0) = 0$, le mouvement est rectiligne et non plan.

b. Conservation de l'énergie mécanique, énergie potentielle effective

\vec{F} , la seule force appliquée à M dans \mathcal{R}_g galiléen est une force conservative, par application du théorème de l'énergie mécanique, $\Delta E_m = W_{nc} = 0 \Rightarrow E_m$ est égale à une constante E_0 qui ne dépend que des CI. :

$$E_m = E_c + E_p(r) = E_0 = Cte(CI)$$

En exprimant E_c en coordonnées polaires dans le plan du mouvement,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) \Rightarrow E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p(r) = E_0$$

Or, $r^2\dot{\theta} = C \iff \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ et on peut se ramener ainsi à l'étude d'un système à une seule variable : r .

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r) = E_0 \quad \text{intégrale première du mouvement.}$$

Définition : on définit alors l'énergie potentielle effective, $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ telle que

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p_{\text{eff}}}(r) \quad \text{en posant} \quad E_{p_{\text{eff}}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)$$

La connaissance de $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ permet de préciser graphiquement le domaine du mouvement radial et si M est dans un état lié au un état de diffusion de M puisque

$$E_{p_{\text{eff}}}(r) = E_m - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \leq E_m$$



Exemple : Potentiel de Yukawa. Dans la théorie de Yukawa sur les forces nucléaires, l'interaction est caractérisée par une force attractive centrale qui dérive de l'énergie potentielle $E_p(r) = -\frac{K}{r}e^{-\frac{r}{a}}$ où K est une constante positive. On en déduit

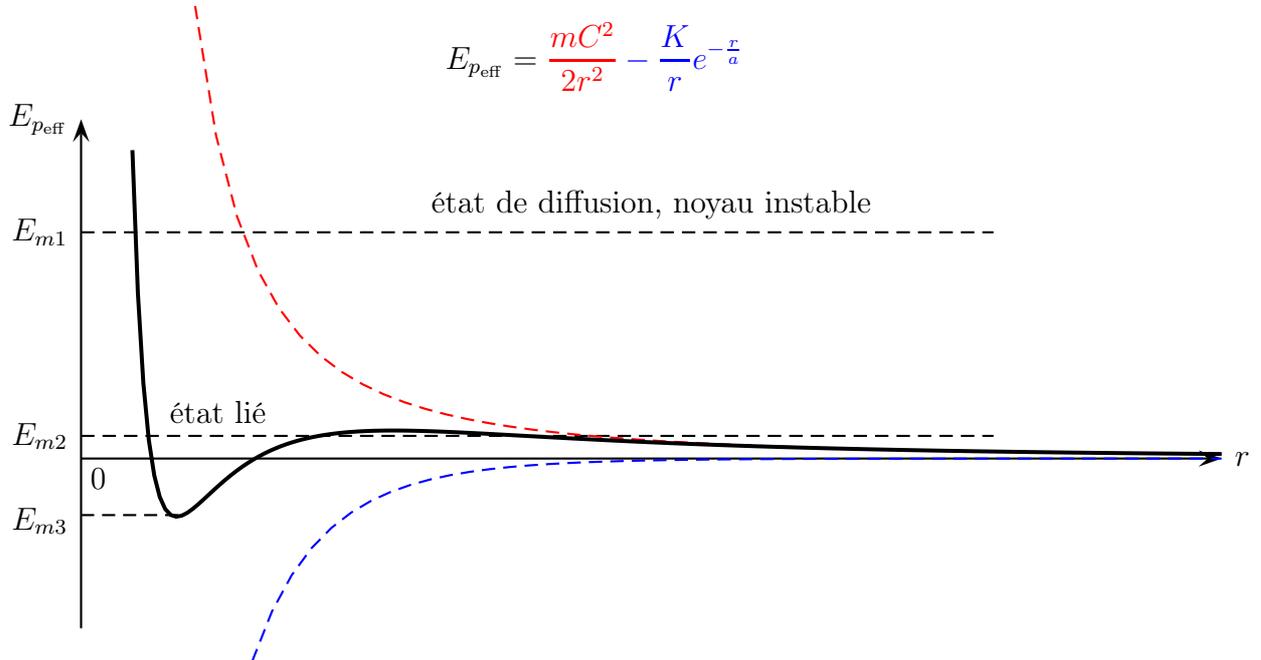


FIGURE 6 – Energie potentielle effective d'un proton dans la théorie de Yukawa

En fonction de l'énergie mécanique, on rencontre différentes situations, certaines zones sont non permises. La particule est forcément dans une zone non grisée.

- | | | |
|--|---|---|
| $E_m = E_{m1}$
$\Rightarrow r \leq r_{\min}$
Etat de diffusion | $E_m = E_{m2}$
$\Rightarrow r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$
Etat lié | $E_m = E_{m3}$
$\Rightarrow r = Cte$
Etat lié, mvt circulaire |
|--|---|---|

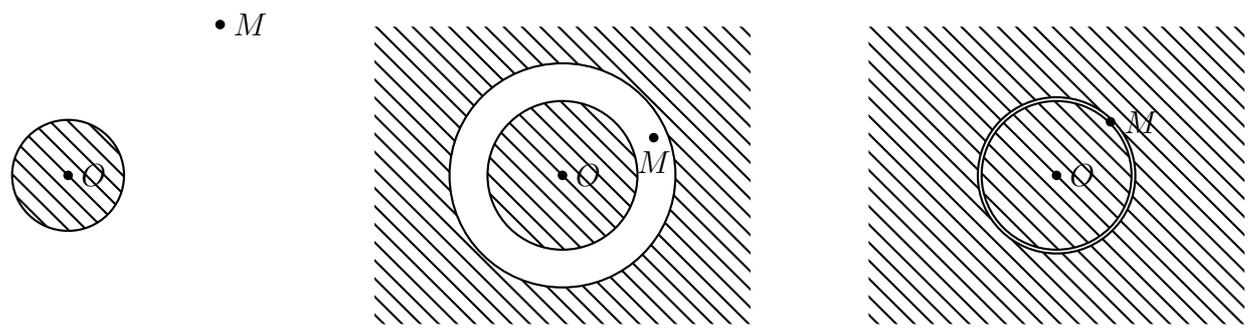


FIGURE 7 – Différents états possibles

II Cas des champs newtoniens

1. Loi de force

a. Définition



Les interactions newtoniennes (de gravitation ou électrostatique) sont caractérisées par une force \vec{F} centrale de centre de force O de la forme :

$$\vec{F} = -\frac{k\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$$

Remarque : certains ouvrages définissent plutôt $\vec{F} = +\frac{k}{r^2}\cdot\vec{e}_r$, il faut donc adapter les notations.

b. Exemple de l'interaction gravitationnelle : force de gravitation

Si on place en O une masse m_O fixe (point source), elle crée autour d'elle un champ de gravitation $\vec{G}_O(r,\theta,\varphi)$. En un point M (point champ) distant de $r = OM$, le champ créé par O sera

$$\vec{G}_O(M) = -\frac{\mathcal{G}m_O\cdot\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} = -\frac{\mathcal{G}m_O}{r^2}\cdot\vec{e}_r$$

Ce champ est permanent mais pas uniforme : il dépend de la position de M .

Un point matériel de masse m_M placé en M subira alors la force

$$\vec{F}_{O/M} = m_M\vec{G}_O(M) = -\frac{\mathcal{G}m_Om_M}{r^2}\cdot\vec{e}_r = -\frac{k}{r^2}\cdot\vec{e}_r \quad \text{avec } k = \mathcal{G}m_Om_M > 0$$

Remarques :

- $\mathcal{G} = 6,67\cdot 10^{-11}$ SI est la constante de gravitation.
- $k > 0$ ce qui impose \vec{F} toujours attractive.
- Un corps sphérique de rayon R et de centre de masse O crée en $r \geq R$ le même champ que si toute sa masse était concentrée en O .

Exemple : cas du système Terre – Lune.

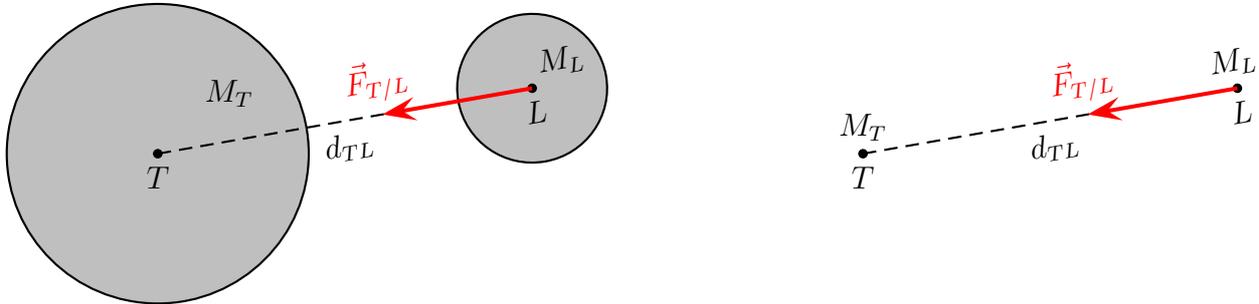


FIGURE 8 – Interaction Terre – Lune, pas à l'échelle

$$\vec{F}_{T/L} = m_L\vec{G}_T(L) = -\frac{\mathcal{G}m_Tm_L}{d_{TL}^2}\cdot\vec{e}_r$$

c. Exemple de l'interaction électrostatique : force coulombienne

L'interaction électrostatique entre deux particules de charges q_O placée en O (point source) et q_M placée en M (point champ) est

$$\vec{F}_{O/M} = \frac{q_Oq_M}{4\pi\epsilon_0r^2}\cdot\vec{e}_r = -\frac{k}{r^2}\cdot\vec{e}_r \quad \text{avec } k = -\frac{q_Oq_M}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{et } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9,0\cdot 10^9 \text{ SI}$$

Par analogie avec le champ de gravitation \vec{G} , on définit le champ électrostatique (non uniforme) créé par O en M .

$$\vec{E}_O(M) = \frac{q_O}{4\pi\epsilon_0r^2}\cdot\vec{e}_r$$

L'interaction est

- attractive si $k > 0 \iff q_O q_M < 0$
- répulsive si $k < 0 \iff q_O q_M > 0$

2. Énergie potentielle

Pour vérifier si \vec{F} est conservative, on calcule son travail élémentaire et on vérifie si c'est une forme intégrable. Si c'est le cas, $\delta W(\vec{F}) = -dE_p$.

Comme \vec{F} est centrale, le mouvement du mobile est forcément plan et on utilise l'expression de $d\vec{r}$ dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta) = -\frac{k}{r^2} dr = -dE_p \quad \text{avec } E_p = -\frac{k}{r}$$

On prend $E_p(r \rightarrow \infty) = 0$ puisque il n'y a plus d'interaction si M trop loin de O .

\vec{F} , la résultante des forces est conservative et E_m est une constante qui ne dépend que des conditions initiales.

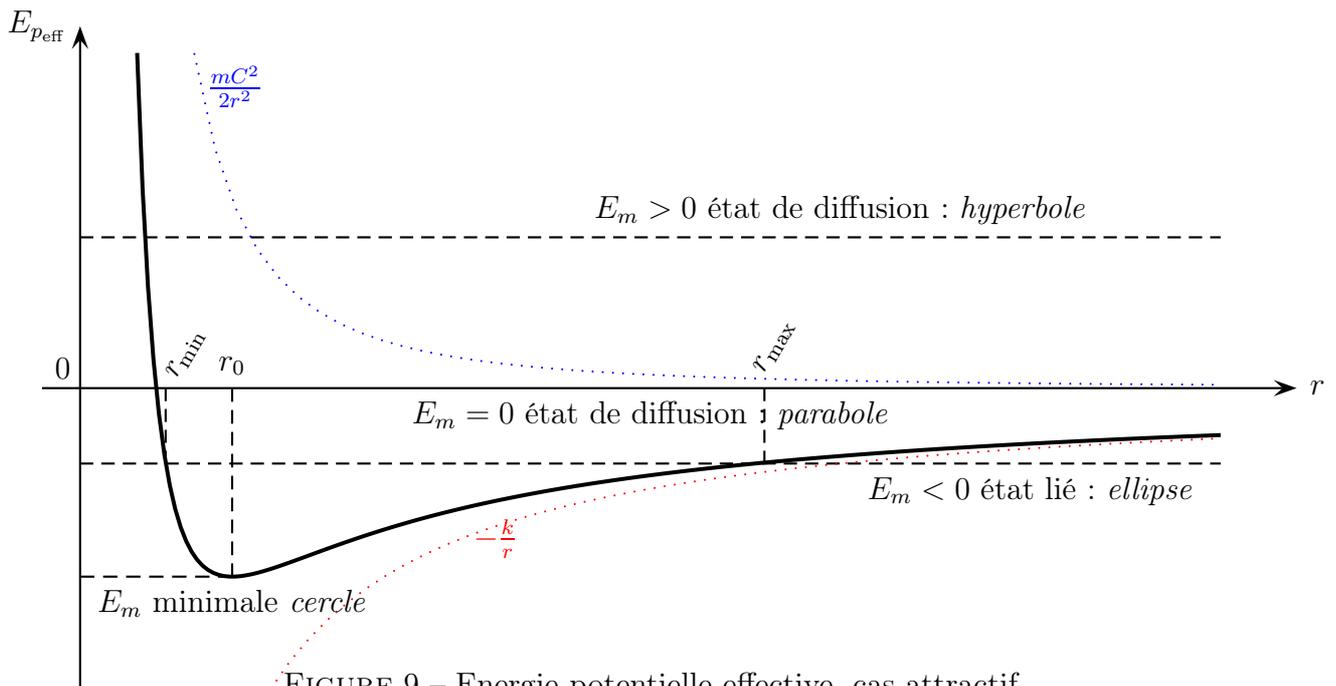
3. Énergie potentielle effective, discussion graphique de l'évolution radiale

Par conservation de l'énergie mécanique et du moment cinétique L_O d'une particule M de masse m par rapport à O , on peut se ramener à l'étude d'un système à un degré de liberté en définissant l'énergie potentielle effective telle que.

$$E_m(M/\mathcal{R}_g) = Cte = E_m = E_c + E_p(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r) = E_{p_{\text{eff}}}(r) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \quad \text{avec}$$

$$E_{p_{\text{eff}}} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r) \iff E_{p_{\text{eff}}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{k}{r}$$

a. Interaction attractive : $k > 0$



On voit sur ce graphe que la nature du mouvement dépend de E_m :

- Le graphe $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ passe par un minimum pour $r = r_0$, la trajectoire est circulaire.
- Si $E_m > 0$, M est dans un état de diffusion : M peut se rapprocher de O à la distance minimale d'approche puis s'éloigner à l'infini. On peut montrer que la trajectoire est une hyperbole.
- Si $E_m < 0$, M est dans un état lié : M et O resteront à distance finie, $r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}$. La trajectoire est une ellipse.
- Si $E_m = 0$, on est à la limite entre état lié et état de diffusion. La trajectoire est une parabole.



trajectoires

b. Interaction répulsive : $k < 0$

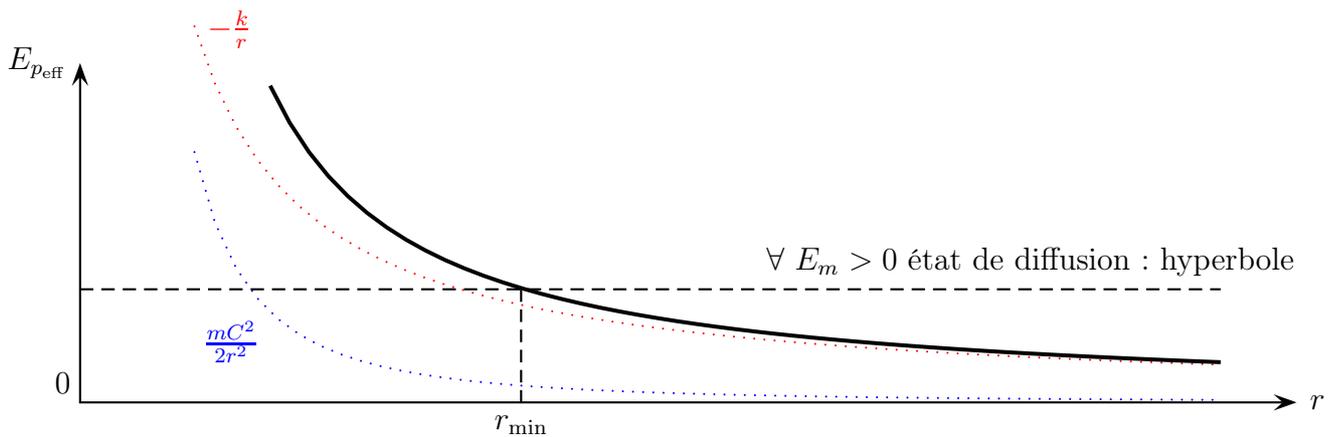


FIGURE 10 – Energie potentielle effective, cas répulsif

E_m est la somme de deux valeurs positive, on a donc toujours $E_m > 0$ et M sera dans un état de diffusion. La trajectoire est toujours hyperbolique.

c. Trajectoires possibles : admis

La discussion sur le graphe $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ permet de déterminer les variations de r mais pas la trajectoire (sauf dans le cas du cercle).

Des calculs approfondis ou une simulation permettent de montrer que la trajectoire de la particule dans un champ de force $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}$ est une conique : un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

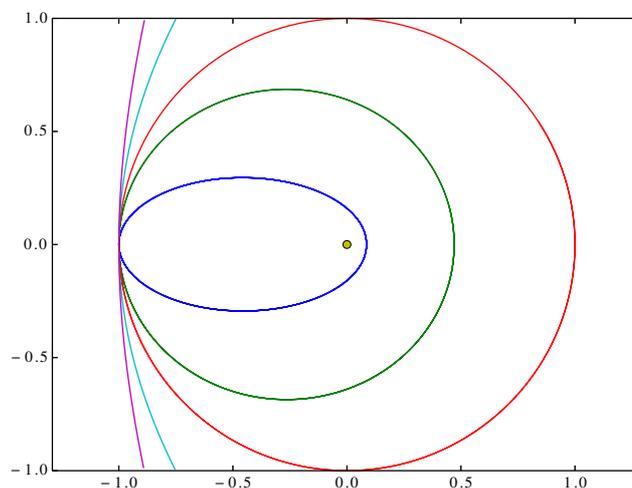


FIGURE 11 – Différentes trajectoires possibles



Trajectoires-Coniques



4. Trajectoire circulaire et applications

On a alors $r = OM = r_0$ une constante. C'est un état lié, il faut impérativement $k > 0$, c'est à dire une force attractive.

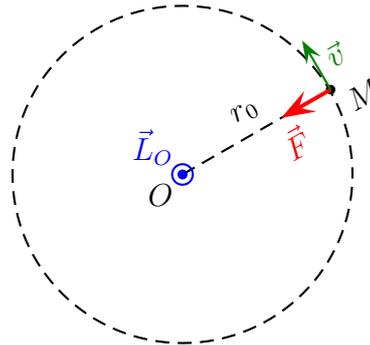


FIGURE 12 – Cas particulier de la trajectoire circulaire

a. Utilisation de la conservation du moment cinétique $\Rightarrow v$ constante.

Dans le référentiel de centre O galiléen, comme \vec{F} est centrale, $\vec{L}_O = C\vec{t}e$ et si il s'agit d'un mouvement circulaire $\vec{r} = r_0 \cdot \vec{e}_R \Rightarrow \vec{v} = v \cdot \vec{e}_\theta$



$$\vec{L}_O = m\vec{r} \wedge \vec{v} = mr_0v\vec{e}_z \text{ avec } r_0 \text{ et } m \text{ constants } \Rightarrow v \text{ constante.}$$

Le mouvement est donc un mouvement circulaire uniforme.

b. Application du principe fondamental de la dynamique \Rightarrow valeur de v et T

Prenons le cas d'un satellite M de masse m en orbite circulaire autour de la Terre de masse m_T dans le référentiel géocentrique.

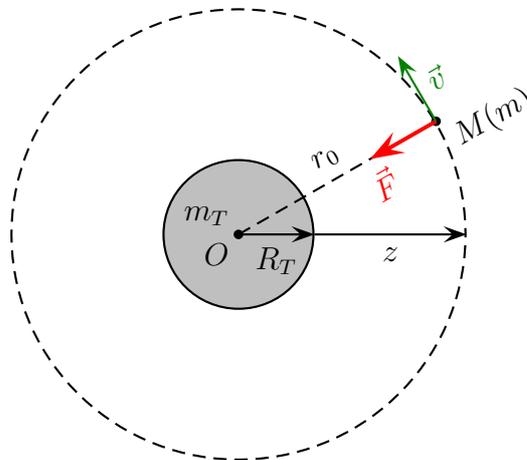


FIGURE 13 – Satellite en orbite circulaire autour de la Terre

Dans la base polaire,

$$\overrightarrow{OM} = r_0 \cdot \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = r_0 \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta = v \cdot \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_\theta - \frac{v^2}{r_0} \cdot \vec{e}_r = 0 - \frac{v^2}{r_0} \cdot \vec{e}_r$$

Par application du principe fondamental de la dynamique sur M dans la base polaire, on obtient

$$-m \frac{v^2}{r_0} \cdot \vec{e}_r = -\frac{\mathcal{G}mm_T}{r_0^2} \vec{e}_r \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_T}{r_0}}$$

On exprime souvent cette vitesse en fonction de g le champ de pesanteur au niveau du sol et du rayon de la Terre R_T . En effet, $g \simeq G(r_0 = R_T) = \frac{\mathcal{G}m_T}{R_T^2} \Rightarrow \mathcal{G}m_T = gR_T^2$ et on en déduit

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_T}{r_0}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_0}}$$

Remarque : la projection du PFD selon \vec{e}_θ permet de retrouver $v = Cte$.

Comme il s'agit d'un mouvement circulaire uniforme, on peut aussi écrire

$$v = \frac{\text{Périmètre du cercle}}{\text{Période de révolution}} = \frac{2\pi r_0}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r_0}{v} = \frac{2\pi r_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mathcal{G}m_T}} = \frac{2\pi r_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g_0 R_T}}$$

Application directe : déterminer la valeur numérique de la première vitesse cosmique ou vitesse circulaire maximale est la vitesse du point M en orbite rasante, c'est à dire à une altitude $z \ll R_T$. Quelle est la période de révolution d'un satellite en orbite rasante ?

Par application de la relation précédente, pour $r_0 = R_T + z \simeq R_T$,

$$v = \sqrt{g_0 R_T} \simeq 7,92 \text{ km.s}^{-1}$$

Le mouvement étant circulaire uniforme,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow v = R_T \omega = \frac{2\pi R_T}{T} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g_0}} \simeq 5075 \text{ s soit } 1 \text{ h } 24 \text{ min } 35 \text{ s}$$

Remarques :

- L'ordre de grandeur de la première vitesse cosmique est à retenir.
- La période a été calculée dans le référentiel géocentrique, pas le référentiel terrestre local, lui-même en rotation dans le référentiel géocentrique.
- L'atmosphère a une épaisseur d'une quarantaine de km, on prendra $z > 40$ km pour éviter les frottements et $z \ll R_T \simeq 6400$ km.
- Les satellites d'observations ont souvent une orbite basse et polaire : altitude de quelques centaines de km et survolant les pôles. Cela leur permet de balayer entièrement la surface terrestre.

c. **Energie mécanique** $\Rightarrow v$ par méthode énergétique.

Par définition,

$$E_m = E_p + E_c = -\frac{k}{r_0} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{k}{r_0} + \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{G}m_T}{r_0} = -\frac{k}{r_0} + \frac{k}{2r_0} \Rightarrow E_m = -\frac{k}{2r_0}$$

Remarques :

- On retiendra l'expression $E_m = -\frac{k}{2r_0}$. Dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon r_0 , permettra par exemple de retrouver rapidement l'expression de v (méthode énergétique)

$$E_c = E_m - E_p = -\frac{k}{2r_0} - \left(-\frac{k}{r_0}\right) \Rightarrow E_c = \frac{k}{2r_0}$$

$$\frac{\mathcal{G}m_T m}{2r_0} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_T}{r_0}}$$

- Cette relation est aussi valable dans le cas d'une interaction coulombienne attractive ($q_0q_M < 0$)

$$E_m = -\frac{k}{2r_0} \Rightarrow E_c = \frac{k}{2r_0} = \frac{-q_0q_M}{8\pi\epsilon_0 r_0} > 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{-q_0q_M}{8\pi\epsilon_0 r_0} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{-q_0q_M}{4\pi\epsilon_0 m r_0}}$$

d. **Cas particulier d'un satellite géostationnaire**

Définition : pour être géostationnaire, un satellite doit rester en permanence à la verticale du même point de la surface de la Terre.

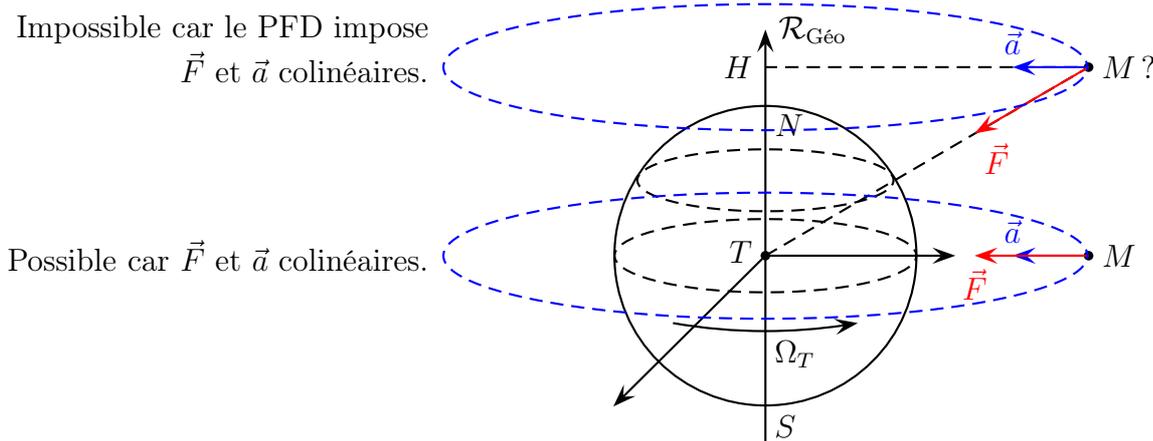


FIGURE 14 – Trajectoire possible d'un satellite géostationnaire dans le référentiel géocentrique

Le référentiel terrestre, lié au sol, est en mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω_T autour de l'axe des pôles dans le référentiel géocentrique.

Le satellite, immobile dans le référentiel lié au sol, est donc en mouvement circulaire de centre H et de vitesse angulaire Ω_T autour de l'axe (NS) des pôles.

Plan du mouvement : pour montrer que le satellite évolue forcément dans le équatorial normal à (NS) et qui passe par T , on peut raisonner par l'absurde :

- Si M n'est pas dans le plan équatorial, son accélération \vec{a} n'est pas colinéaire à \vec{F} , c'est impossible car le PFD impose $\vec{F} = m\vec{a}$.
- Si M est dans le plan équatorial, \vec{a} et \vec{F} sont colinéaires, on peut donc bien avoir $\vec{F} = m\vec{a}$.

Altitude : pour déterminer l'altitude z d'un satellite on utilise maintenant la condition sur la vitesse angulaire

$$\omega(M) = \Omega_T = \frac{2\pi}{T_T} \simeq 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

où T_T est la période de révolution de la Terre dans le référentiel géocentrique soit $T_T = 1$ jour sidéral c'est à dire 23 h 56 min soit 86 160 s. On a ainsi (méthode énergétique)

$$E_m = -\frac{k}{2r} = E_p + E_c \Rightarrow E_c = \frac{k}{2r} \Rightarrow \frac{1}{2}mr^2\Omega_T^2 = \frac{1}{2}mr^2\frac{4\pi^2}{T_T^2} = \frac{\mathcal{G}m_T m}{2r} \Rightarrow r^3 = \frac{\mathcal{G}m_T T_T^2}{4\pi^2}$$

et avec $\frac{\mathcal{G}m_T}{R_T^2} \simeq g$ l'accélération de pesanteur au niveau du sol, on en déduit la distance $r = TM$

$$r = \left(\frac{\mathcal{G}m_T T_T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq \left(\frac{g R_T^2 T_T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq 42,3 \cdot 10^3 \text{ km}$$

D'où une altitude $z = r - R_T \Rightarrow z \simeq 36\,000 \text{ km}$

Remarques :

- On peut retrouver ce résultat par application du PFD sur M en MCU : $\vec{v} = v \cdot \vec{e}_\theta = r\dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta$ et

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow m \frac{d(r\Omega_T \cdot \vec{e}_\theta)}{dt} = -\frac{k}{r^2} \cdot \vec{e}_r \Rightarrow -mr\Omega_T^2 \cdot \vec{e}_r = -\frac{\mathcal{G}mm_T}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{\mathcal{G}m_T T_T^2}{4\pi^2}$$

- La vitesse du satellite est nulle dans le référentiel terrestre mais dans le référentiel géocentrique, $v = r\Omega_T = 3,1 \text{ km.s}^{-1}$
- Les satellites de télécommunication étant géostationnaires, dans l'hémisphère nord il faut orienter les paraboles TV vers le sud et inversement. L'inclinaison dépend de la latitude de l'endroit où on se trouve.

5. Trajectoires elliptiques

Il s'agit d'états liés : $k > 0$, forces attractives et $E_m < 0$.

a. Lois de Kepler

En exploitant les observations de Nicolas Copernic et Tycho Brahe, Johannes Kepler énonce, vers 1610, trois lois qui régissent le mouvement des planètes dans le référentiel de Kepler.

Lois de Kepler :

- **Première loi :** dans le référentiel de Kepler, les planètes décrivent des ellipses dont le soleil est l'un des foyers.
- **Seconde loi :** l'aire balayée par le rayon vecteur Soleil-Planète est proportionnelle au temps mis pour la parcourir.
- **Troisième loi :** le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est une constante pour toutes les planètes du système solaire. T est la période de révolution de la planète et a le demi grand-axe de l'ellipse.

Remarques :

- Le référentiel de Kepler ou référentiel Héliocentrique a pour centre le centre de masse du soleil, ses trois axes sont dirigés vers des étoiles fixes de la galaxie.
Le référentiel de Copernic a les mêmes axes mais son origine est le centre de masse du système solaire. En pratique on prend $\mathcal{R}_{\text{Kepler}} \simeq \mathcal{R}_{\text{Cop}} \simeq \mathcal{R}_g$ galiléen.
- Ces lois sont généralisables à d'autres autres planètes autour d'une étoile bien plus massive mais aussi au cas d'un satellite de masse $m \ll m_T$ autour de la Terre.

b. Caractéristiques des trajectoires elliptiques

Soit une planète P de masse $m \ll m_S$ la masse du soleil S .

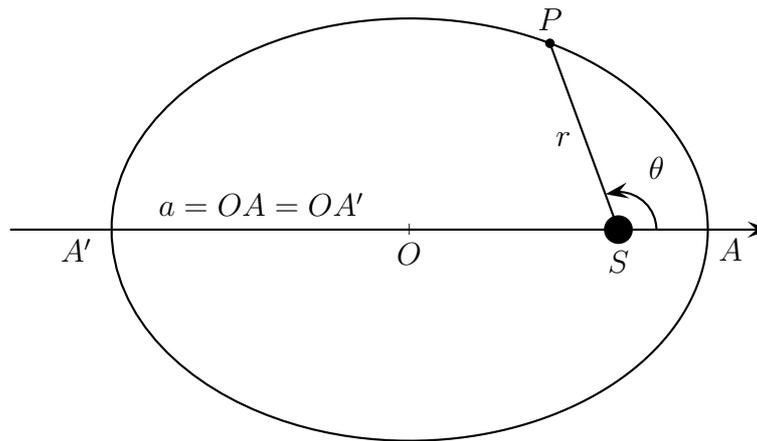


FIGURE 15 – Trajectoire elliptique d'une planète P autour du soleil S



Trajectoire-elliptique



Attention, le soleil et à l'un des foyers de l'ellipse, pas au centre O .

Définitions : on définit pour l'ellipse

- La distance minimale d'approche $SA = r_{\min}$ le périhélie (ou périégée).
- La distance maximale d'éloignement $SA' = r_{\max}$ l'aphélie (ou apogée).
- Le demi grand axe $a = OA = \frac{AA'}{2} = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max})$

Remarques :

- En A et A' , la distance $r = SP$ atteint un extrémum,

$$\frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}} = 0 + E_{p,\text{eff}} \Rightarrow E_m = E_{p,\text{eff}}$$

il s'agit bien des valeurs qui apparaissaient sur la figure 9.

- Pour les planètes de notre système (sauf mercure), l'excentricité

$$e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \ll 1 \Rightarrow r_{\min} \simeq r_{\max} \simeq a$$

et les trajectoires sont quasiment circulaires ($e = 0$).

c. Énergie mécanique

On a montré qu'en A et A' , comme $\dot{r} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = 0$ et

$$E_m = E_{p,\text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{k}{r} \Rightarrow r^2 + \frac{k}{E_m}r - \frac{mC^2}{2E_m} = 0$$

équation du second degré dont les solutions sont r_{\min} et r_{\max} . Si on résout cette équation,

$$r_{\min} = -\frac{k}{2E_m} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad r_{\max} = -\frac{k}{2E_m} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

de sorte que

$$r_{\min} + r_{\max} = -\frac{k}{E_m} \quad \Rightarrow \quad E_m = -\frac{k}{r_{\min} + r_{\max}} = -\frac{k}{2a}$$

Remarque : on retrouve la même relation que pour le mouvement circulaire $E_m = -\frac{k}{2r_0}$ avec $r_0 = r_{\min} = r_{\max} = a$. Un cercle est une ellipse particulière.

Conclusion : on retiendra cette relation utile, généralisable à tous les corps soumis à une force newtonienne $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\cdot\vec{e}_r$ et en état lié (il faut que a soit défini).



$$E_m = -\frac{k}{2a}$$

d. Étude de la vitesse

On a remarqué sur les simulations que la vitesse v de M n'est plus constante si la trajectoire est elliptique et non circulaire. En effet,

$$-\frac{k}{2a} = E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

la vitesse v est maximale au périhélie et minimale à l'aphélie.

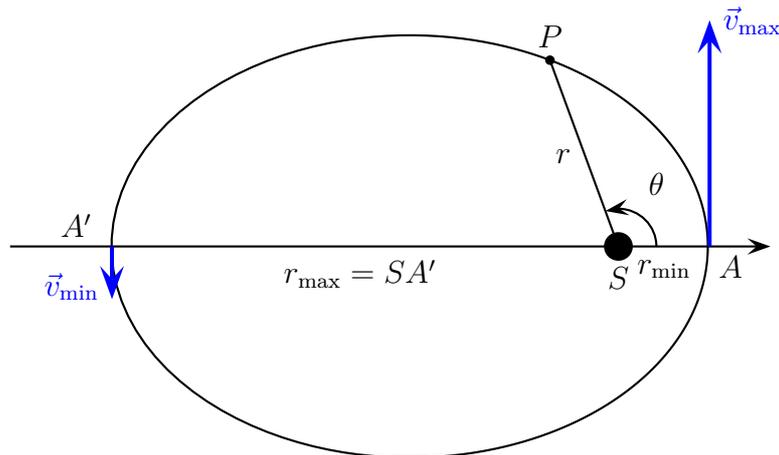


FIGURE 16 – Relation entre les vitesses et les distances maximales et minimales

Par conservation du moment cinétique aux points A et A' ,

$$\begin{aligned} \vec{L}_S(P) &= m.\overrightarrow{SA} \wedge \vec{v}_{\max} = m.\overrightarrow{SA'} \wedge \vec{v}_{\min} \Rightarrow mr_{\min}v_{\max} \sin \frac{\pi}{2} \cdot \vec{e}_z = mr_{\max}v_{\min} \sin \frac{\pi}{2} \cdot \vec{e}_z \\ &\Rightarrow r_{\max}v_{\min} = r_{\min}v_{\max} \end{aligned}$$



e. Seconde loi de Kepler

C'est simplement la loi des aires appliquée aux planètes. Elle découle de la conservation du moment cinétique de P dans $\mathcal{R}_{\text{Kepler}}$:

$$\frac{d\vec{L}_S(P)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_S(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = Cte = mC \quad \text{avec} \quad C = r^2\dot{\theta} = 2 \cdot \frac{dA}{dt}$$

f. Utilisation de la troisième loi de Kepler

Elle nous indique que $\frac{T^2}{a^3}$ est une constante pour toutes les planètes du système solaire, quelle que soit leur masse et leur trajectoire. On cherche à déterminer l'expression de la constante.

Imaginons une planète M de masse m en mouvement circulaire (ellipse particulière) de rayon a . On a alors d'après ce qui précède

$$E_m = -\frac{k}{2a} = -\frac{k}{a} + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{\mathcal{G}mm_S}{2a} \Rightarrow v^2 = \frac{\mathcal{G}m_S}{a}$$

on retrouve v constante et la même expression que pour le satellite en MCU autour de la Terre.

La vitesse étant constante, la trajectoire de longueur $L = 2\pi a$ est parcourue en $T = \frac{2\pi a}{v} \Rightarrow v = \frac{2\pi a}{T}$ et en remplaçant dans l'équation précédente,

$$\frac{4\pi^2 a^2}{T^2} = \frac{\mathcal{G}m_S}{a} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_S}$$

il s'agit bien d'une constante indépendante de la planète elle-même, elle ne dépend que de la masse de l'astre considéré.

Remarque : cette loi est elle aussi utilisable pour des satellites en orbite autour de la Terre ou tout autre corps en état lié autour d'un astre de masse beaucoup plus grande.

Applications directes :

1. Quelle est la période de révolution T_M de Mars situé à $d_M \simeq 230$ Mkm sachant que la Terre se situe à $d_T \simeq 150$ Mkm.
2. Retrouver l'altitude d'un satellite géocentrique en utilisant la troisième loi de Kepler.
1. Pour la Terre et Mars, on considère des trajectoires quasiment circulaires de demi grand axe $a_T = d_T$ et $a_M = d_M$ on a ainsi

$$\left(\frac{T^2}{a^3}\right)_M = \left(\frac{T^2}{a^3}\right)_T \Rightarrow T_M = T_T \left(\frac{a_M}{a_T}\right)^{\frac{3}{2}} \simeq 1 \times \left(\frac{230}{150}\right)^{\frac{3}{2}} \simeq 1,90 \text{ années}$$

2. Pour le satellite en orbite circulaire $r = Cte = a = R_T + z$ autour de la Terre de masse m_T ,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T} = \frac{4\pi^2}{gR_T^2} \Rightarrow a = \left(\frac{gR_T^2 T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow z \simeq 36.10^3 \text{ km}$$

6. Trajectoire parabolique, deuxième vitesse cosmique

On se place ici dans le cas où $E_m = 0$ et $k > 0$, forces attractives.

Si on reprend le cas d'un satellite de la Terre, on a

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}mm_T}{r} = Cte = 0$$



Trajectoire-parabolique



Définition : La seconde vitesse cosmique ou vitesse de libération (ou encore vitesse parabolique) est la valeur minimale de la vitesse à communiquer à un corps à la surface de l'astre pour qu'il se trouve en état de diffusion.

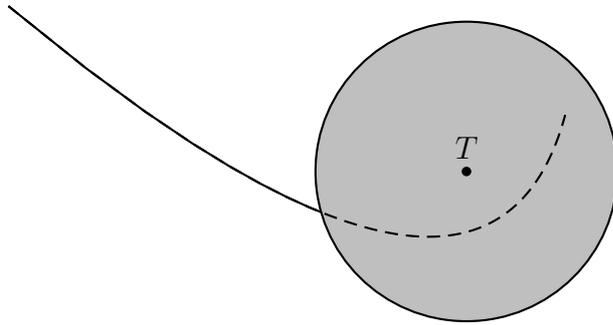


FIGURE 17 – Trajectoire parabolique

Exemple : pour la Terre, au niveau du sol ($r = R_T$),

$$E_m = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{\mathcal{G}mm_T}{R_T} = 0 \Rightarrow v_l = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_T}{R_T}} = \sqrt{2g_0R_T} \simeq 11,2 \text{ km.s}^{-1}$$

Remarques :

- L'ordre de grandeur de cette vitesse est à retenir.
- Le foyer de la parabole est le centre de la Terre.
- Le système peut théoriquement se retrouver à une distance $r \rightarrow \infty$ mais il a alors une vitesse $v \rightarrow 0$. Il a donc "tout juste" assez d'énergie pour se trouver en état de diffusion, il s'est tout juste libéré de l'astre.

7. Mouvement hyperbolique

a. Cas attractif

En augmentant l'énergie mécanique à une valeur positive, on peut observer des trajectoires hyperboliques, y compris pour une interaction attractive ($k > 0$).



Trajectoire-hyperbolique

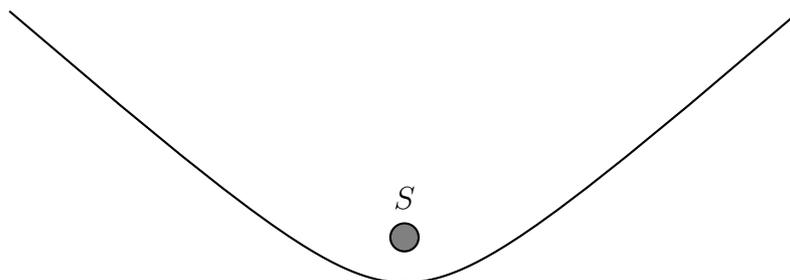


FIGURE 18 – Trajectoire hyperbolique

b. Cas répulsif, exemple de la diffusion de Rutherford

L'étude de la déviation (D) de particules α (Hélium 4 de charge $q = +2e$) envoyées sur une mince feuille d'or (noyau lourd $m_{\text{noyau}} \gg m_{\text{alpha}}$ de charge $Q = +Ze > 0 \Rightarrow k = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} < 0$) permet à Rutherford de comprendre qu'un atome est constitué d'un noyau extrêmement dense et chargé positivement, entouré par des électrons \rightarrow modèle planétaire.

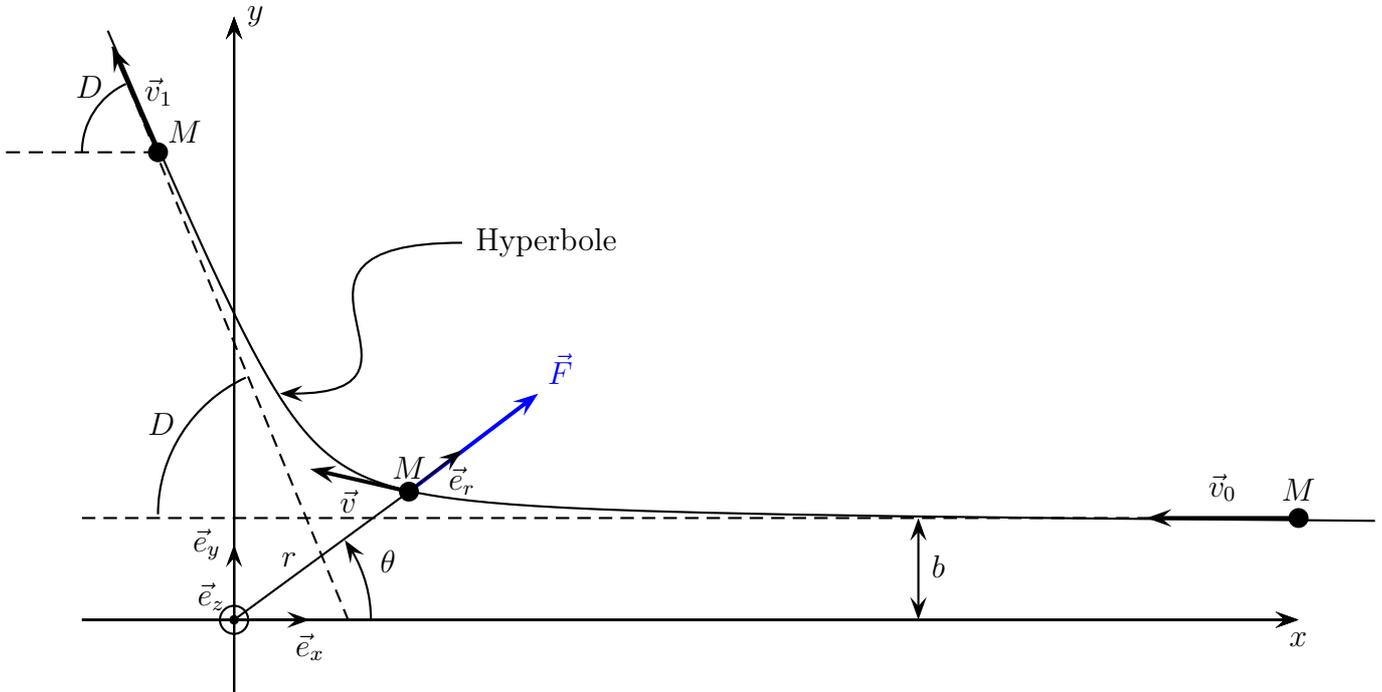


FIGURE 19 – Diffusion d'une particule α pour un noyau d'atome d'or.

Capacités exigibles :

- Point matériel soumis à un seul champ de force centrale.
 - Dédire de la loi du moment cinétique la conservation du moment cinétique.
 - Connaître les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
- Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.
 - Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.
 - Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné à la valeur de l'énergie mécanique.
 - Approche documentaire : Relier l'échelle spatiale sondée à l'énergie mise en jeu lors d'une collision en s'appuyant sur l'expérience de Rutherford.
- Champ newtonien. Lois de Kepler.
 - Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.
- Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.
 - Montrer que le mouvement est uniforme et savoir calculer sa période.
 - Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.
- Satellite géostationnaire.
 - Calculer l'altitude du satellite et justifier sa localisation dans le plan équatorial
- Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire puis dans le cas du mouvement elliptique.
 - Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire.
 - Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.
- Vitesses cosmiques : vitesse en orbite basse et vitesse de libération.
 - Exprimer ces vitesses et connaître leur ordre de grandeur en dynamique terrestre.

Table des matières

I Force centrales conservatives, généralités

1. Définition et exemples
 - a. Définitions
 - b. Oscillateur harmonique plan
2. Lois générales de conservation
 - a. Conservation du moment cinétique et conséquences
 - b. Conservation de l'énergie mécanique, énergie potentielle effective

II Cas des champs newtoniens

1. Loi de force
 - a. Définition
 - b. Exemple de l'interaction gravitationnelle : force de gravitation
 - c. Exemple de l'interaction électrostatique : force coulombienne
2. Énergie potentielle
3. Énergie potentielle effective, discussion graphique de l'évolution radiale
 - a. Interaction attractive : $k > 0$
 - b. Interaction répulsive : $k < 0$
 - c. Trajectoires possibles : admis
4. Trajectoire circulaire et applications
 - a. Utilisation de la conservation du moment cinétique $\Rightarrow v$ constante.
 - b. Application du principe fondamental de la dynamique \Rightarrow valeur de v et T
 - c. Énergie mécanique $\Rightarrow v$ par méthode énergétique.
 - d. Cas particulier d'un satellite géostationnaire
5. Trajectoires elliptiques
 - a. Lois de Kepler
 - b. Caractéristiques des trajectoires elliptiques
 - c. Énergie mécanique
 - d. Étude de la vitesse
 - e. Seconde loi de Kepler
 - f. Utilisation de la troisième loi de Kepler
6. Trajectoire parabolique, deuxième vitesse cosmique
7. Mouvement hyperbolique
 - a. Cas attractif
 - b. Cas répulsif, exemple de la diffusion de Rutherford