PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaines 27 et 28

du lundi 17 mai 2021 au samedi 30 mai 2021

1. **Tout exercice sur l'intégration, notamment ceux utilisant la formule de Taylor avec reste intégral et/ou les sommes de Riemann**. Semaines 27 et 28
2. Définition de série, de série convergente. Exemples. Condition nécessaire de convergence : le terme général tend vers 0. Ce n'est pas une condition suffisante : exemples !
3. Lien entre suite et série : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de même nature que $\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n-1})$.
4. Séries à termes positifs : théorème de majoration/minoration. Exemples.
5. Règle de d'Alembert (2 versions) : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_{n+1}/u_n \leq a < 1$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = l < 1$.
6. Théorème de comparaison des séries positives : équivalents, domination. Utilisation de dév. limités.
7. Séries de Riemann. Exemple des séries de Bertrand.
8. Série réelle ou complexe absolument convergente. Toute série absolument convergente est convergente.
9. Séries alternées. « Critère spécial » de convergence des séries alternées. Exemples.
10. Majoration de la somme, estimation des restes d'une série alternée convergente.
11. Matrice d'un système de vecteurs, matrice d'une application linéaire.
12. Relation entre les coordonnées d'un vecteur et celles de son image par une application linéaire.
13. Noyau, image et rang d'une matrice. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. Semaine 28
14. Le rang d'une matrice est $\dim \operatorname{Im} A$ c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les (vecteurs-)colonnes de A.
15. Le rang d'une application linéaire est le rang de sa matrice dans n'importe quelle base.
16. Produit de matrices et composition d'applications linéaires. Application linéaire et matrice inversible.
17. Les lignes non nulles de la réduite échelonnée de A forment une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A. Le rang de A est aussi la dimension de $\mathrm{Lgn}(A)$.
18. Les colonnes pivot de A forment une base de $\operatorname{Im} A$.
19. Caractérisation des matrices inversibles à l'aide du rang. La multiplication par une matrice inversible conserve le rang. Le rang de $A \in \mathrm{M}_{np}(K)$ est le rang de A^{T}.
20. Matrice de passage. Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur.
21. Effet d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire. Formule $A' = Q^{-1}AP$.
22. Déterminant d'une matrice carrée de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$: unique application de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, linéaire par rapport à chaque colonne de sa variable, antisymétrique et vérifiant $\det I_n = 1$.
23. Justification de la définition lorsque $n = 2$ et $n = 3$. Conséquence : opérations sur les colonnes d'un déterminant. On ne modifie pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à un colonne une combinaison linéaire des autres colonnes de ce déterminant.

Questions de cours relatives au programme de colles

1. Formule de Taylor avec reste intégral. Enoncé seulement
2. Définition de série, de série convergente.
3. Lien entre suite et série : énoncé+preuve. Exemple d'utilisation du théorème.
4. Théorème de majoration/minoration pour les séries positives : énoncé+preuve. Exemple d'utilisation.
5. Règle de d'Alembert (avec $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n$) : énoncé+preuve.
6. CNS de convergence des séries de Riemann. Enoncé + preuve.
7. Série alternée : définition. Critère spécial de convergence : énoncé + preuve.
8. Relation entre coordonnées d'un vecteur et celles de son image par une application linéaire, interprétation matricielle avec démonstration.
9. Relation entre la composition d'applications linéaires et le produit matriciel : énoncé + preuve.
10. Définition d'image et de noyau d'une matrice.