PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaines 25 et 26

du lundi 26 avril 2021 au samedi 8 mai 2021

Semaines 25 et 26

1. Dimension de l'espace produit. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.
2. Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie possède un supplémentaire.
3. Formule de Grassmann : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
4. F et G sont en somme directe dans E ssi $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$.
5. Définition (et uniquement cela pour l'instant) du rang d'une famille de vecteurs.
6. Isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie : $E \simeq F \Leftrightarrow \dim E = \dim F$.
7. Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$: si E et F sont de dimension finie, $\dim \mathcal{L}(E,F) = (\dim E)(\dim F)$.
8. Rang d'une application linéaire définie entre deux espaces vectoriels de dimension finie.
9. Formule du rang : si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\dim E = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$.
10. Équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim E = \dim F$.
11. Fonctions en escalier et subdivisions subordonnées. Intégrale d'une fonction en escalier.
12. Fonction continue par morceaux. Intégrale d'une fonction continue par morceaux : Notation $\int_{[a;b]} f$.
13. Propiétés algébriques de l'intégrale. Positivité et croissance. Inégalités de continuité.
14. Extensions de la définition : notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
15. Inégalité de Cauchy-Schwarz et relation de Chasles. **Sommes de Riemann**. Exemples.
16. Primitives d'une fonction continue. Théorème fondamental du calcul intégral : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b$. Semaine 26
17. Intégrations par parties successives. Changements de variable : formule $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x$
18. Primitives usuelles. Exemples de primitives de fractions rationnelles (aucune théorie !) .
19. Primitives et intégrales de fonctions trigonométriques (règles de Bioche seulement en exercices !) .
20. Primitives de fonctions de type exponentielle-polynôme $t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
21. Calcul approché d'une intégrale : méthode des trapèzes.
22. Formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor Young (démonstrations).
23. Définition de série, de série convergente. Exemples. Condition nécessaire de convergence : le terme général tend vers 0. Ce n'est pas une condition suffisante : exemples !
24. Lien entre suite et série : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de même nature que $\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n-1})$.
25. Séries à termes positifs : théorème de majoration/minoration. Exemples.
26. Règle de d'Alembert (2 versions) : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_{n+1}/u_n \leq a < 1$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = l < 1$.
27. Théorème de comparaison des séries positives : équivalents, domination. Utilisation de dév. limités.
28. Séries de Riemann. Exemple des séries de Bertrand.

Questions de cours relatives au programme de colles

Semaine 25 début

1. Définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie et justification.
2. Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dim finie possède un supplémentaire : preuve.
3. Une famille libre d'un ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ possède au plus n vecteurs. Famille libre de n vecteurs.
4. Une famille génératrice d'un ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ possède au moins n vecteurs. Famille génératrice de n vecteurs.

Semaine 26 début

5. Énoncé précis et preuve de la formule du rang.
6. Équiv. entre injectivité, surjectivité et bijectivité pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim E = \dim F$ + preuve.
7. Si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue positive, alors $\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ ssi } f = \underline{0}\right)$ + preuve

Semaine 25 fin

8. Énoncé et démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
9. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I et $a \in I$, alors $F : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et $F' = f$: preuve.
10. Formule de Taylor avec reste intégral. Enoncé + preuve
11. Exemple de calcul de la limite d'une somme de Riemann.
12. Formule de changement de variable dans une intégrale : énoncé + preuve

Semaine 26 fin