PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaines 21 et 22

du lundi 15 mars 2020 au samedi 27 mars 2021

1. **Ensembles finis** : nombre d'applications de E dans F.
2. Nombre d'injections de E dans F quand $|E| \leqslant |F|$, nombre de bijections de E dans F quand $|E| = |F|$.
3. Ensemble des parties de E. Ensemble des parties à p éléments de E : combinaisons notées $\binom{n}{p}$.
4. Construction de l'e.v. $\mathbb{K}[X]$ à partir des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Produit de polynômes.
5. Dégré d'un polynôme : degré d'une somme, d'un produit.
6. Éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$. Définition de la valuation d'un polynôme (et c'est tout).
7. Fonctions polynomiales. Composition de polynômes. Degré d'une composée de deux polynômes.
8. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. Exemples de divisions pratiques. Multiples et diviseurs.
9. Division par $(X - a)$ et par $\prod_{k=1}^{p}(X - a_k)$ lorsque les a_k sont distincts.
10. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, P possède au plus n racines distinctes dans $\mathbb{K}$ (et corollaires).
11. Dérivation formelle. Propriétés : linéarité, produit, composition, degré.
12. Dérivations successives, formules de Taylor.
13. Reste et quotient de la division euclidienne de P par $(X - a)^k$.
14. Racines multiples. Caractérisation à l'aide des dérivées successives.
15. Polynômes irréductibles. Si $\deg P = 1$, P est irréductible. Polynômes irréductibles de degré 2.
16. Théorème de D'Alembert-Gauss (admis). Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.
17. Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et factorisation dans $\mathbb{R}[X]$. Exemples.
18. Somme et produit des racines d'un polynôme scindé. Relations coefficients-racines pour les polynômes de degré 2 ou 3.
19. Définition d'espace vectoriel. Exemples. Règles de calcul, propriété de régularité. Semaine 22
20. Systèmes de vecteurs. Combinaisons linéaires.
21. Sous-espaces vectoriels. Propriété caractéristique.
22. Sous-espace vectoriel engendré par un système de vecteurs.
23. Somme de sous-espaces vectoriels. Somme directe, sous-espaces supplémentaires.
24. Applications linéaires. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$.
25. Composition de deux applications linéaires. Inverse d'une application linéaire.
26. Image directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.
27. Caractérisation des applications linéaires injectives et surjectives à l'aide de $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$.
28. Ensemble des solutions d'une équation linéaire.

Questions de cours relatives au programme de colles

1. Si E est un ensemble fini, cardinal de l'ensemble des parties de E. Semaine 21 début
2. Si E est un ensemble fini, cardinal de l'ensemble des parties à p éléments de E.
3. Définition du dégré d'un polynôme et équivalence
$$\forall P = (a_n) \in \mathbb{K}[X],\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\},\ (\deg P \leq k) \iff (\forall n \in \mathbb{N},\ n > k \Rightarrow a_n = 0)$$
4. Degré d'une somme, d'un produit : démonstration.
5. Définition du polynôme composé $P \circ Q$. Degré de $P \circ Q$: démonstration.
6. Division euclidienne : énoncé et démonstration. Semaine 22 début
7. $(X - a)^p \mid P$ et $(X - a)^{p+1} \nmid P$ ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)^p Q$ et $Q(a) \neq 0$: preuve.
8. Si $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$ possède $n + 1$ racines distinctes, alors $P = 0$: preuve.
9. Preuve de la formule de Taylor : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \forall a \in \mathbb{K},\ P = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(X - a)^k$.
10. Caractérisation d'une racine d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de P à l'aide de P et de P' : énoncé seulement. Semaine 21 fin
11. a est racine d'ordre k de P ssi ($P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$) : preuve.
12. Relations coefficients-racines pour les polynômes de degré 2 (cours du début d'année) et de degré 3
13. Sous-espace vectoriel engendré par un système de vecteurs : énoncé et démonstration. Semaine 22 fin