

1. Tout exercice sur la dérivation

Semaines
19 et 20

2. Définition d'un développement limité en x_0 et en $+\infty$. Troncature, DL et équivalents, parité.
3. Développements limités usuels : obtention par la formule de Taylor-Young.
4. DL en 0 de $\cos$, $\sin$, sh , ch , $\exp$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.
5. En particulier DL en 0 de $x \mapsto (1+x)^{-1}$ et $x \mapsto (1-x)^{-1}$.
6. Si $f \in \operatorname{DL}_1(x_0)$ et $x_0 \in I$ alors $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable au point x_0 .
7. Propriétés des DL : somme et produit, intégration et dérivation, composition de DL.
8. Conséquence : Passage au quotient (uniquement en utilisant le DL de $x \mapsto (1+x)^{-1}$).
9. Calcul de limites et études de fonctions : comportement asymptotique.
10. Ensembles finis.
 - a. Définition, cardinal d'un ensemble fini. Exemple des parties finies de $\mathbb{N}$.
 - b. Opérations sur les ensembles finis : cardinal d'une réunion, du complémentaire ...
 - c. Applications dans des ensembles finis : conséquence de l'injectivité, la surjectivité ...
11. Si $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$ et $f : E \rightarrow F$ alors $(f \text{ injective}) \text{ ssi } (f \text{ surjective}) \text{ ssi } (f \text{ bijective})$.
12. Ensembles d'applications : nombre d'applications de E dans F .
13. Nombre d'injections de E dans F quand $|E| \leq |F|$, nombre de bijections de E dans F quand $|E| = |F|$.
14. Ensemble des parties de E . Ensemble des parties à p éléments de E : combinaisons notées $\binom{n}{p}$.
15. Construction de l'e.v. $\mathbb{K}[X]$ à partir des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Produit de polynômes.
16. Degré d'un polynôme : degré d'une somme, d'un produit.
17. Éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$. Définition de la valuation d'un polynôme (et c'est tout).
18. Fonctions polynomiales. Composition de polynômes. Degré d'une composée de deux polynômes.
19. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. Exemples de divisions pratiques. Multiples et diviseurs.
20. Division par $(X-a)$ et par $\prod_{k=1}^p (X-a_k)$ lorsque les a_k sont distincts.
21. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, P possède au plus n racines distinctes dans $\mathbb{K}$ (et corollaires).
22. Dérivation formelle. Propriétés : linéarité, produit, composition, degré.
23. Dérivations successives, formules de Taylor.
24. Reste et quotient de la division euclidienne de P par $(X-a)^k$.
25. Racines multiples. Caractérisation à l'aide des dérivées successives.

Semaine
20

QUESTIONS DE COURS RELATIVES AU PROGRAMME DE COLLES

1. Énoncé de la formule de Leibniz.
2. Énoncé et démonstration du théorème de Rolle.
3. Énoncé et démonstration de l'égalité des accroissements finis.
4. Énoncé des deux versions de l'inégalité des accroissements finis.
5. Définition de la notion de développement limité en 0 et en $+\infty$.
6. Développements limités usuels.
7. Définition d'ensemble fini. Cardinal, preuve de l'unicité du cardinal.
8. Si E et F sont des ensembles finis, $E \times F$ est fini et $\operatorname{Card}(E \times F) = (\operatorname{Card} E)(\operatorname{Card} F)$.
9. Si E et F sont des ensembles finis, cardinal de l'ensemble des applications de E dans F .
10. Si E est un ensemble fini, cardinal de l'ensemble des parties de E .
11. Si E est un ensemble fini, cardinal de l'ensemble des parties à p éléments de E .
12. Définition du degré d'un polynôme et équivalence

Semaine
19 début

Semaine
20 début

Semaine
19 fin

$$\forall P = (a_n) \in \mathbb{K}[X], \forall k \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}, (\deg P \leq k) \iff (\forall n \in \mathbb{N}, n > k \Rightarrow a_n = 0)$$

13. Degré d'une somme, d'un produit : démonstration.
14. Définition du polynôme composé $P \circ Q$. Degré de $P \circ Q$: démonstration.

Semaine
20 fin