PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaines 17 et 18

du lundi 1er février 2021 au samedi 13 février 2021

Semaines 17 et 18

1. Limites : propriétés liées à l'ordre. Théorème de la limite monotone.
2. Opérations algébriques sur les limites. Composition de limites.
3. Fonction continue sur un segment (résultat admis).
4. Applications lipschitziennes : définition, exemples. Application contractante.
5. Lemme du TVI par suites adjacentes dichotomiques. Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de la bijection monotone (démontré partiellement).
6. Relations de comparaison pour les fonctions : domination et prépondérance, équivalence.
7. Caractérisations avec $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ Propriétés algébriques des relations de comparaison.
8. Si $f \sim_a g$ et $\lim_{x\to a} g(x) = l \in]0;+\infty] \setminus \{1\}$ ou 0^+, alors $\ln f \sim_a \ln g$. $e^u \sim_a e^v$ ssi $(u-v)(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
9. Comparaison des fonctions de référence en 0 et $+\infty$.
10. Fonctions à valeurs complexes. Limites, continuité : opérations algébriques.
11. Caractérisations des limites ou de la continuité par l'utilisation des parties réelles et imaginaires.
12. Dérivabilité en un point des fonctions réelles. Dérivabilité à droite, à gauche.
13. Equivalence avec la différentiabilité en un point (ç-à-d l'existence d'un DL d'ordre 1).
14. Fonction dérivée sur un intervalle. Dérivées d'ordre supérieur.
15. Propriétés algébriques : linéarité, produit, inverse et quotient. Formule de Leibniz.
16. Dérivée et composition, dérivée de la réciproque d'une application bijective.
17. Extremum local en un point où f est dérivable. Théorème de Rolle.
18. Théorème des accroissements finis.
19. Inégalités des accroissements finis. Version 1 : $m \leq f' \leq M$ sur $[a;b]$. Version 2 : $|f'| \leq k$ sur I.
20. Conséquences : sens de variation des fonctions, limite de la dérivée, théorème de prolongement de la dérivée.
21. Étude d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$, utilisation de l'inégalité des accroissements finis. Sur des exemples : intervalle stable, application contractante, point fixe.
22. Définition d'un développement limité en x_0 et en $+\infty$. Troncature, DL et équivalents, parité.
23. Développements limités usuels : obtention par la formule de Taylor-Young.
24. DL en 0 de $\cos$, $\sin$, sh, ch, $\exp$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.
25. En particulier DL en 0 de $x \mapsto (1+x)^{-1}$ et $x \mapsto (1-x)^{-1}$.
26. Si $f \in \mathrm{DL}_1(x_0)$ et $x_0 \in I$ alors $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable au point x_0.
27. Propriétés des DL : somme et produit, intégration et dérivation, composition de DL.
28. Conséquence : Passage au quotient (uniquement en utilisant le DL de $x \mapsto (1+x)^{-1}$).

Semaine 18 (items 18 à 28)

Questions de cours relatives au programme de colles

1. Preuve de la proposition : si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$. — Semaine 17 début
2. Preuve du théorème de la limite monotone : fonction croissante majorée/non majorée.
3. Preuve du lemme : si $g \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ vérifie $g(a)g(b) \leq 0$, il existe $c \in [a;b]$ tel que $g(c) = 0$.
4. Preuve du théorème des valeurs intermédiaires.
5. Définition du nombre dérivée d'une fonction en un point + différentiabilité (énoncé seulement) — Semaine 18 début
6. Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables au point a, alors $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$: preuve.
7. Énoncé et démonstration de la formule de Leibniz.
8. Énoncé et démonstration du théorème de Rolle. — Semaine 17 fin
9. Énoncé et démonstration de l'égalité des accroissements finis.
10. Énoncé des deux versions de l'inégalité des accroissements finis.
11. Définition de la notion de développement limité en 0 et en $+\infty$.
12. Développements limités usuels. — Semaine 17 fin