PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI[2] semaines 13 et 14

du lundi 4 janvier 2020 au samedi 16 janvier 2021

1. Matrices symétriques et antisymétriques. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Semaines 13 et 14
2. Matrices inversibles. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
3. Caractérisations :

$$(A \text{ inversible à gauche}) \Leftrightarrow (A \text{ inversible à droite}) \Leftrightarrow (\mathrm{rg}\, A = n) \Leftrightarrow \left(A \underset{L}{\sim} I_n\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} AX = 0_{n1} \text{ n'a que} \\ \text{la solution nulle} \end{pmatrix}$$

$$(A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall B \in M_{n1}(\mathbb{K}),\ AX = B \\ \text{admet une unique solution} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall B \in M_{n1}(\mathbb{K}),\ AX = B \\ \text{admet au moins une solution} \end{pmatrix}$$

4. Inversion en lignes (résolution d'un système linéaire). Méthode du pivot de Gauss pour le calcul de l'inverse d'une matrice inversible. Exemples.
5. Nombres entiers naturels : définition, division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
6. Une partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
   Une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.
7. Principe de récurrence : récurrence à un ou plusieurs prédécesseurs. Exemples.
8. Nombres premiers. Tout entier $p \in [\![2; +\infty[\![$ possède un diviseur premier. Théorème fondamental de l'arithmétique (admis).
9. PGCD de deux entiers, propriétés. Théorème d'Euclide.
10. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD. ($d|a$ et $d|b$) ssi $d|\mathrm{PGCD}(a, b)$.
11. PPCM de deux entiers. Propriétés immédiates. Pas beaucoup plus que la définition !
12. Corps des nombre réels. Intervalles. Partie majorée, minorée, bornée. Plus grand et plus petit élément.
13. Borne inférieure, borne supérieure. Caractérisation. Partie entière, conséquence : densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Valeur approchée d'un réel à 10^{-n} près : approximation décimale. Semaine 14
14. L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un anneau, un espace vectoriel.
15. Suites majorées, minorées, bornées. Suites monotones. Suites extraites.
16. Suites convergentes et divergentes : définition, opérations algébriques sur les limites.
17. Toute suite convergente est bornée. Suites extraites d'une suite convergente.
18. Limite et relation d'ordre. Monotonie et convergence : suite croissante majorée/non majorée.
19. Théorèmes d'encadrement. Suites adjacentes : définition, convergence.
20. Relations de comparaison pour les suites : domination et prépondérance, équivalence de suites.
21. Comparaison des suites de références : si $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a > 1$, $\quad (\ln n)^{\beta} \ll n^{\alpha} \ll a^n \ll n!$
22. Suites complexes : définition, suites bornées, suites convergentes.
23. Une suite complexe est convergente ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent.
24. Opérations algébriques sur les limites de suites complexes.

Questions de cours relatives au programme de colles

1. Formule du binôme pour les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. (avec preuve). Semaine 13 début
2. Caractérisations d'une matrice inversible (6 points équivalents) avec preuve.
3. Définition de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Explications de la méthode du pivot de Gauss pour le calcul de l'inverse.
4. Théorème de division euclidienne dans $\mathbb{N}$ (énoncé + preuve). Semaine 14 début
5. Définition de PGCD. Justification. $\mathrm{PGCD}(a, b)$=$\mathrm{PGCD}(b, r)$ si $a = bq + r$.
6. Exposé de l'algorithme d'Euclide.
7. Définition de plus grand élément/plus petit élément d'une partie de $\mathbb{R}$. Définition de borne inférieure, supérieure. Semaine 13 fin
8. Définition de suite réelle convergente. Preuve de l'unicité de la limite.
9. Définition de partie dense dans $\mathbb{R}$. Preuve de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
10. Définition de suites adjacentes. Preuve de la convergence des suites adjacentes. Semaine 14 fin