PROGRAMME DE COLLES MATH PCSI^2 semaines 11 et 12

du lundi 7 décembre 2020 au samedi 19 décembre 2020

1. Définition d'équation linéaire à p inconnues dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Interprétation géométrique des systèmes 2×2 en terme d'équations de droites. Semaines 11 et 12
2. Questionnement sur la compatibilité d'un système, sur le problème d'unicité d'une solution.
3. Définition d'espace vectoriel. Exemple : $\mathbb{K}^p$.
4. Définition de système linéaire de $n \in \mathbb{N}^*$ équations à $p \in \mathbb{N}^*$ inconnues.
5. Définition de matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$. Notation $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Matrice d'un système, matrice complète.
6. Matrices colonnes d'une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Interprétation d'un système linéaire à partir des combinaisons linéaires des matrices colonnes de la matrice du système.
7. Defin. du produit d'une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice-colonne $X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Calcul pratique.
8. Système homogène associé au système S : il s'agit d'un sev de $\mathbb{K}^p$.
9. Opérations sur les systèmes et les matrices : trois types d'opérations autorisées.
10. Matrices équivalentes selon les lignes. Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.
11. Système de Cramer triangulaire. Définition de matrice échelonnée, de pivot, de matrice échelonnée réduite. Exemples.
12. Toute matrice est équivalente selon les lignes à une matrice échelonnée. Algorithme de Gauss-Jordan.
13. Toute matrice est équivalente selon les lignes à une unique matrice échelonnée réduite.
14. Définition d'inconnue principale et d'inconnue secondaire. **Théorème d'existence et d'unicité des solutions d'un système linéaire**.
15. Rang d'un système et description paramétrique de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.
16. Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'espace vectoriel $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Base canonique (pas de notion générale).
17. Définition du produit de deux matrices : **formule**. Propriétés : bilinéarité, matrice identité, distributivité par rapport à l'addition.
18. Espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Le produit est une loi de composition interne sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Puissances de matrices et formule du binôme. Matrices triangulaires et diagonales. Semaine 12
19. Multiplication d'une matrice par des matrices de la base canonique (à gauche et à droite). Multiplication par des matrices d'opération élémentaire (dilatation, permutation, transvection).
20. Traduction matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan.
21. Transposition. Linéarité. Transposée d'un produit. Transposée d'une matrice d'opération élémentaire.
22. Matrices symétriques et antisymétriques. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
23. Matrices inversibles. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
24. Caractérisations :

$$(A \text{ inversible à gauche}) \Leftrightarrow (A \text{ inversible à droite}) \Leftrightarrow (\operatorname{rg} A = n) \Leftrightarrow \left(A \underset{L}{\sim} I_n\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} AX = 0_{n1} \text{ n'a que} \\ \text{la solution nulle} \end{pmatrix}$$

$$(A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall B \in M_{n1}(\mathbb{K}),\ AX = B \\ \text{admet une unique solution} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall B \in M_{n1}(\mathbb{K}),\ AX = B \\ \text{admet au moins une solution} \end{pmatrix}$$

25. Inversion en lignes (résolution d'un système linéaire). Méthode du pivot de Gauss pour le calcul de l'inverse d'une matrice inversible. Exemples.
26. Nombres entiers naturels : définition, division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
27. Une partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
    Une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.
28. Principe de récurrence : récurrence à un ou plusieurs prédécesseurs. Exemples.

Questions de cours relatives au programme de colles

1. Définition de matrice échelonnée et de matrice échelonnée réduite. Semaine 11 début
2. Définition du produit d'une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice-colonne de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Formule.
3. Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire (démo).
4. Toute matrice est équivalente selon les lignes à une matrice échelonnée (avec preuve).
5. Définition d'inconnue principale et secondaire. Définition de rang d'une matrice. Semaine 12 début
6. Théorème d'existence et d'unicité des solutions d'un système linéaire (énoncé seulement).
7. Définition du produit de deux matrices. Formule. Savoir faire un produit.
8. Définition de matrice triangulaire. Produit de matrices triangulaires (avec preuve). Semaine 11 fin
9. Formule du binôme pour les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. (avec preuve).
10. Caractérisations d'une matrice inversible (6 points équivalents) avec preuve.
11. Définition de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Explications de la méthode du pivot de Gauss pour le calcul de l'inverse. Semaine 12 fin